EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria y Ciencias del Mar

MATEMÁTICAS APLICADAS

CUADERNILLO para el estudiante

ASESORÍA ACADÉMICA

SEXTO SEMESTRE

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

DGETAyCM
Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria y Ciencias del Mar

Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria y Ciencias del Mar

Créditos

Desarrollo de contenido

Abel Cain Ortíz Zavalza

Armando Miranda Nájera

Claudia Farías Estrada

Gilberto Santiago Alavés

Damián Chávez Díaz

Luis Enrique Jiménez Salazar

Luis Miguel Morales Mendoza

Rubén Isiordia Meza

Revisión técnico - pedagógica

Andrea Archundia Rodríguez

Arit Furiati Orta

Itandehui García Flores

Judith Doris Bautista Velasco

Primera edición, 2022

DGETAyCM

México

Introducción

El cuadernillo de Asesorías Académicas de la asignatura de **Matemáticas Aplicadas**, forma parte de una colección de recursos de apoyo para jóvenes estudiantes de los Centros de Bachillerato Tecnológico Agropecuario (CBTA), Centros de Bachillerato Tecnológico Forestal (CBTF), Centros de Estudios Tecnológicos en Aguas Continentales (CETAC), Centros de Estudios Tecnológicos del Mar (CETMAR), los cuales tienen el propósito de ofrecerte elementos para lograr los aprendizajes requeridos y favorecer tu desarrollo académico.

En la primera sección hay aspectos relacionados con la Asesoría Académica que te permitirán ubicarla como elemento de apoyo a tu trayectoria académica.

En la segunda sección te mostramos actividades que te ayudarán a identificar tus áreas de oportunidad, partiendo de la recuperación de tus aprendizajes; así mismo, podrás reforzar aspectos conceptuales que faciliten la comprensión de los contenidos del área físico-matemática correspondiente al componente de formación disciplinar extendido.

Encontrarás actividades de reflexión, análisis, lecturas, ejercicios, planteamientos a resolver, entre otras, que podrás poner en práctica para comprender aspectos importantes. Conocer acerca del lenguaje algebraico, ecuaciones lineales y cuadráticas, figuras geométricas, relaciones y funciones en el triángulo, lugares geométricos y cálculo diferencial.

Esperamos que este material constituya una herramienta valiosa para tu formación y sea útil para apoyar tu proceso de aprendizaje acerca de las matemáticas.

La Asesoría Académica

La asesoría académica es un servicio a través del cual encontrarás apoyo para favorecer el logro de tus aprendizajes. Se brinda mediante sesiones de estudio adicionales a la carga horaria reglamentaria y se te apoya para despejar dudas sobre temas específicos. También se te recomiendan materiales adicionales (bibliografía complementaria, ejercicios, resúmenes, tutoriales, páginas web, entre otros), de los que podrás apoyarte para el estudio independiente y evitar el rezago académico.

La asesoría académica puede ser:

a) Preventiva: acciones con los alumnos que tienen bajo aprovechamiento académico, han reprobado evaluaciones parciales o no lograron comprender algún contenido curricular, y que requieren apoyo para adquirir o reforzar aprendizajes específicos de alguna asignatura, módulo o submódulo. Consiste en lograr que el alumno mejore la calidad de sus aprendizajes, incremente su rendimiento académico y evite la reprobación.

b) Remedial: son acciones con los alumnos que al finalizar el semestre han reprobado alguna asignatura, módulo o submódulo y requieren apoyo académico para mejorar los aprendizajes frente a las evaluaciones extraordinarias y en general para alcanzar los aprendizajes establecidos en el programa de estudios correspondiente. Su propósito es que los alumnos regularicen su situación académica y eviten el abandono escolar.

Índice temático

Estructura didáctica

Cada lección se estructura por las siguientes secciones:

Explorando

Sección dirigida a reconocer tu nivel de conocimiento sobre la temática a abordar, puede contener preguntas abiertas, reactivos de opción múltiple ejercicios, actividades, entre otros. Apoya en la detección de las necesidades formativas de los estudiantes, lo que permitirá tomar decisiones sobre las actividades de asesoría que se pueden desarrollar.

Practicando

Promueve la ejercitación e integración de contenidos que se abordan en la lección. Refiere el desarrollo de estrategias centradas en el aprendizaje (elementos didácticos para brindar orientaciones a partir de ejercicios como resolución de problemas, dilemas, casos prácticos, etc.). Permite poner en práctica lo revisado en la sección de habilidad lectora y facilita el aprendizaje de los contenidos temáticos.

Comprendiendo

Se trabaja con lecturas que brindan elementos para la comprensión de los contenidos (temáticas) que se abordan en la asesoría académica y promueve la comprensión lectora, constituye un elemento para el estudio independiente.

Auto evaluación

Aporta elementos para que te autoevalúes y tomen junto con tu asesor académico medidas oportunas para continuar con tu proceso de aprendizaje.

Investigando

Se te proporcionan recomendaciones sobre recursos de apoyo y material centrado en áreas específicas, para fortalecer la temática estudiada.

Lección 1. Sucesiones numéricas

Explorando

Selecciona y subraya la respuesta correcta a cada sucesión numérica.

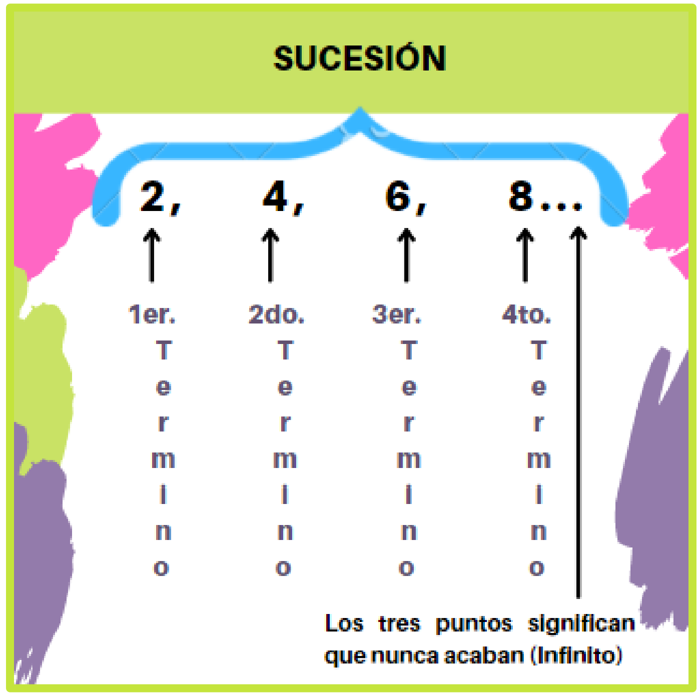
1. **3, ___, 7, 9, ___, 13**
    a) 5 y 11
    b) 5 y 12
    c) 4 y 10
    d) 4 y 12
2. **115, ___, 155, 175, 195**
    a) 130
    b) 125
    c) 145
    d) 135
3. **4, 4, 8, 24, ___**
    a) 130
    b) 125
    c) 96
    d) 135
4. **2, 5, 7, 12, 19, ___ , 50, ___, ___**

a) 22, 71, 121
b) 27, 61, 111
c) 31, 81, 131
d) 21, 63, 189

Comprendiendo

Sucesiones numéricas

Son todos los conjuntos numéricos, cuyos términos obedecen a una ley de formación que nos permite determinar el término que continúa, donde cada número ocupa una posición y recibe el nombre de término.



Tipos de sucesiones numéricas

- **Sucesiones numéricas aritméticas:** Son aquellas en donde la ley de formación se encuentra por medio de una suma o una resta, además la diferencia entre los términos siempre es igual.

$$3, \xrightarrow{+2} 5, \xrightarrow{+2} 7, \xrightarrow{+2} 9,\ldots$$

$$21, \xrightarrow{-5} 16, \xrightarrow{-5} 11, \xrightarrow{-5} 6,\ldots$$

$$3, \xrightarrow{-2} 1, \xrightarrow{-2} -1, \xrightarrow{-2} -3,\ldots$$

Fórmulas

Sucesión aritmética	Suma de los términos de una serie aritmética
$a_n = a_1 + (n-1)\,d$	$S_n = n/2\,(a_1 + a_n)$
a_1 = Valor del primer término	
n = Número del término	
d = Diferencia entre términos	

Ejemplo: María comenzó a ahorrar para poder comprarse un celular, el primer mes logró ahorrar \$500.00; el segundo \$800.00; el tercero \$1,100.00; el cuarto \$1,400.00 y así sucesivamente durante doce meses.

a) ¿Cuánto ahorró en el mes 12?

b) ¿Cuánto ahorró en total durante los 12 meses?

+ \$300 → **Diferencia**

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°
\$500	\$800	\$1,100	\$1,400	----	----	----	----	----	----	----	?

Solución

Identificación de datos	Operaciones	Resultados
a_{12} = ? S_{12} = ? a_1 = \$500 n = 12 d = \$300	$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)\ d}$ $a_{12} = 500 + (12-1)\ 300$ $a_{12} = 500 + (11)\ 300$ $a_{12} = 500 + 3300$ $a_{12} = 3,800$ $\mathbf{S_n = n/2\ (a_1 + a_n)}$ $S_{12} = 12/2\ (500 + 3800)$ $S_{12} = 6\ (4300)$ $S_{12} = 25,800$	¿Cuánto ahorró en el mes 12? **\$ 3,800** ¿Cuánto ahorró en total durante los 12 meses? **\$25,800**

- **Sucesiones numéricas geométricas:** Son aquellas en donde la ley de formación, la podemos encontrar mediante una multiplicación o división de dos cantidades.

$3, \xrightarrow{x\ 2} 6, \xrightarrow{x\ 2} 12, \xrightarrow{x\ 2} 24,\ldots$

$216 \xrightarrow{\div\ 3} 72, \xrightarrow{\div\ 3} 24, \xrightarrow{\div\ 3} 8,\ldots$

$1, \xrightarrow{x\ -4} -4, \xrightarrow{x\ -4} 16, \xrightarrow{x\ -4} -64,\ldots$

$270, \xrightarrow{\div\ -3} -90, \xrightarrow{\div\ -3} 30, \xrightarrow{\div\ -3} -10,\ldots$

Fórmulas

Sucesión geométrica	Suma de los términos de una serie geométrica
$a_n = a_1 \times r^{n-1}$	$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$
a_1 = Valor del primer término	
r = Razón	
n = Número del término	

Ejemplo: Un laboratorio el primer día generó 60 vacunas; en el segundo 180; en el tercer 540; el cuarto 1620 y así sucesivamente.

a) ¿Cuántas vacunas se generarán el día 7?

b) ¿Cuántas vacunas se generarán en total los 7 días?

x 3 → razón

1º día	2º día	3º día	4º día	5º día	6º día	7º día
60	180	540	1620	----	----	**?**

x 3

Identificación de datos	Operaciones	Resultados
a_7 = ? S_7 = ? N = 7 a_1 = 60 r = 3	$a_n = a_1 \times r^{n-1}$ $a_7 = 60 \times 3^{7-1}$ $a_7 = 60 \times 3^6$ $a_7 = 60 \times 729$ $a_7 = 43740$ $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ $S_7 = \dfrac{60(1-3^7)}{1-3}$ $S_n = \dfrac{60(1-2187)}{-2}$ $S_7 = \dfrac{60(-2186)}{-2}$ $S_7 = \dfrac{-131160}{-2}$ $S_7 = \dfrac{60(1-2187)}{-2}$ $S_7 = 65580$	¿Cuántas vacunas se generarán el día 7? **43,740 vacunas** ¿Cuántas vacunas se generarán en total los 7 días? **65,580 vacunas**

Practicando

Resuelve los siguientes problemas.

1. Una secretaria ahorra para dar el enganche de una PC, la primera semana ahorró \$120; la segunda \$320; la tercera \$520 y así sucesivamente, durante 25 semanas.

a) ¿Cuánto tendrá en la semana 25?

b) ¿Cuánto dinero tendrá en total al finalizar las 25 semanas?

Apoyo: utiliza la fórmula de sucesiones aritméticas.

Identificación de datos	Operaciones	Resultado

2. Un laboratorio de análisis clínicos detectó que una bacteria se reproduce de la siguiente forma, en la primera hora se tenían 5 bacterias; en la segunda incrementó a 15, en la tercera a 45; en la cuarta a 135; en la quinta a 405 y así sucesivamente.

a) ¿Cuántas bacterias se tendrán a las 24 horas?

b) ¿Cuántas bacterias se tendrán en total durante las 24 horas?

Apoyo: utiliza la fórmula de sucesiones geométricas.

Identificación de datos	Operaciones	Resultado

3. Identifica a qué tipo de sucesión pertenecen. **A=** aritmética y **G=** geométrica.

Sucesión	Tipo	Sucesión	Tipo
a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,...		**b)** 31, 81, 131	
c) 1, 3, 9, 27, 81, ...		**d)** 5, 25, 50, 150,...	
e) 55,50,45,40,35 y 30		**f)** 20, 35, 50	
g) 320, -160, 80, -40, 20,...		**h)** −1, −3, −9, −27, −81, ...	
i) 6, 12, 24, 48, 96,...		**j)** 3, 3, 3, 3, 3, ...	
k) -5, -3, -1, 1, 3 y 5		**l)** 1, -5, 25, -125,..	

Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver los siguientes ejercicios.

Relaciona las columnas, escribiendo dentro del paréntesis la letra de los números faltantes en la sucesión numérica.

(	) 10, 15, ____, 25, 30, ____, 40, 45, ____	a)	81, 729, 6561
(	) 80, 70, ____ 50, 40, ____ , 20, ____	b)	20, 35, 50
(	) 3, 6, 12, ____, 48, ____, ____	c)	6, 9, 10
(	) 3, 9, 27, ____, 243, ____,2187, ____	d)	60, 30,10
(	) 4, 6, 5, 7, ____, 8, 7, ____, 8, ____9	e)	24, 96, 192

Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Comprendo qué es una sucesión numérica.		
Logro identificar la diferencia entre sucesión aritmética y geométrica.		
Puedo aplicar fórmulas para la resolución de sucesiones.		
Soy capaz de resolver problemas de sucesiones aritméticas.		
Soy capaz de resolver problemas de sucesiones geométricas.		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Tu Profe En Línea (2 de agosto de 2016). Sucesiones Numéricas. Diferentes casos [video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=Vlmgmlt7t9U
- Math2me (12 de agosto de 2010). Sucesiones aritméticas [video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=W0bkKBR0Q_I
- Math2me (12 de agosto de 2010). Sucesiones geométricas [video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=cmAkW6xpZxo

Referencias:

- Khan Academy (s. f.). Cambio y relaciones - Sucesiones. [En línea] https://es.khanacademy.org/math/10-grado-innova-schools/xa7995709915977c2:cambio-y-relaciones---sucesiones#xa7995709915977c2:introduccion-a-las-sucesiones (Consultado el 04 de septiembre de 2021).
- MAtesfacil (s.f.). Sucesiones aritméticas: conceptos, fórmulas y problemas resueltos. [En línea] https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/sucesion-aritmetica-formulas-ejemplos-problemas-resueltos.html (consultado el 31 de agosto de 2021).

Imágenes tomadas de:

- https://canva.com/

Lección 2. Traslación, rotación y simetría

Explorando

Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo se le llama al movimiento que realiza la Tierra alrededor del sol en 365 días?
   a) movimiento de traslación
   b) movimiento de simetría
   c) movimiento de rotación

2. ¿Cómo se le llama movimiento que realiza la tierra en 24 horas, y que da lugar a las diferentes posiciones del sol en el trascurso del día?
   a) movimiento de simetría
   a) movimiento de rotación
   b) movimiento de traslación

3. Si consideramos a la Tierra como una esfera sin irregularidades en el terreno, podríamos observar que tanto el hemisferio norte como el hemisferio sur son iguales entre sí, solamente divididos por el Ecuador. ¿A esta propiedad se le llama?
   1. Simetría
   2. Rotación
   3. Traslación

4. Si decimos que el tren se trasladó de Guadalajara hacia la Ciudad de México ¿cómo describirías su movimiento?
   a. Como una traslación
   b. Como una rotación
   c. Como simétrico

5. Cuando se dice que un objeto dio un giro de 180 grados ¿de qué manera se desplaza el objeto?
   a) Realiza un movimiento de traslación
   b) Realiza un movimiento simétrico
   c) Realiza un movimiento de rotación

Comprendiendo

Movimientos en el plano

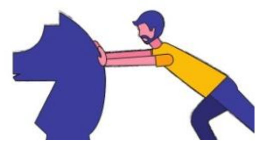
Este tipo de movimiento tiene lugar cuando se manipula un plano geométrico, conservando la distancia, los lados y los ángulos de la figura. Por lo tanto, las figuras conservan su tamaño y su forma, resultando una figura llamada imagen.

Existen tres tipos de movimientos en el plano:

- Traslación
- Rotación
- Simetría

Traslación

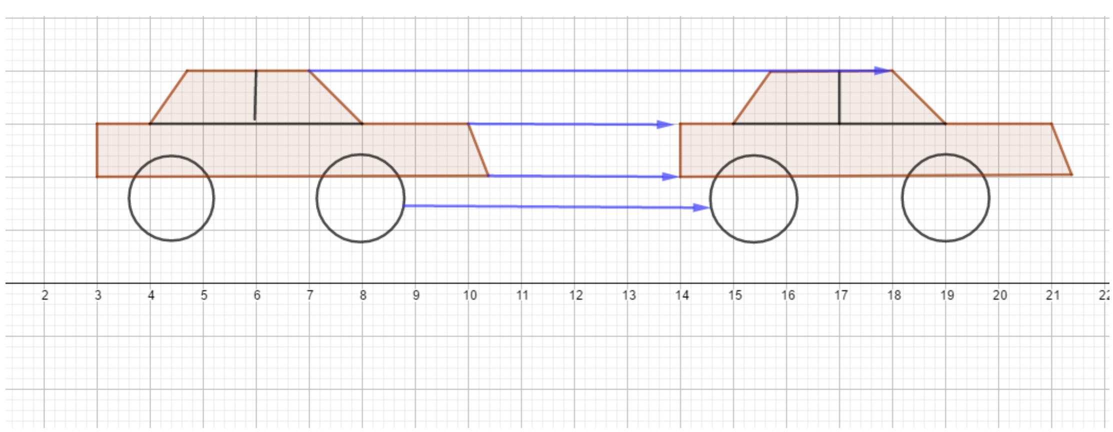
La traslación se define como el movimiento de una figura en el que todos y cada uno de sus puntos se desplazan hacia una misma *dirección* y a la misma *distancia*. Cuando movemos empujamos un mueble o el movimiento de un vehículo en una dirección dada, son algunos ejemplos de traslación.



Analiza el siguiente ejemplo, en el cual se muestra el desplazamiento que realiza una figura al efectuar un movimiento de **traslación,** (nota que cada uno de los puntos se desplaza hacia la misma dirección y se encuentran a la misma distancia).

Ejemplo

Un automóvil que se encuentra sobre el plano tiene su defensa trasera ubicada en línea correspondiente a x=3, y se desea que dicho automóvil realice un movimiento de traslación de manera horizontal hacia la derecha con un valor de 11 unidades. **Figura 1** ¿En qué línea se encontrará su defensa ahora?



Fgura1. *Desplazamiento de un automóvil de manera horizontal hacia la derecha con un valor de 6 unidades*

Puedes darte cuenta de que cada uno de los puntos del automóvil se desplazó 11 unidades hacia la derecha y sin afectar la orientación de este, a esto se le llama movimiento de traslación. Por lo tanto, para dar respuesta a la pregunta solamente debes sumar 11 unidades al número 3, y entonces observarás que ahora la defensa trasera se ubica en la línea x=14 como se puede observar en la *Figura 1*.

Rotación

La rotación se refiere al movimiento que realiza una figura alrededor de un punto, manteniendo su *forma* y su *tamaño*.

Existen tres elementos que determinan una rotación.

- El ángulo que determina la amplitud de la rotación
- El centro de rotación
- El sentido de la rotación

Existen varios ejemplos en nuestra vida cotidiana en los cuales se aplica la rotación, como ejemplos tenemos la vuelta de la Tierra sobre su propio eje, el rodar de una llanta, el giro de las aspas en un abanico, entre otros.

A continuación, te mostramos la *Figura 2* en la cual se representa el movimiento de **rotación.**

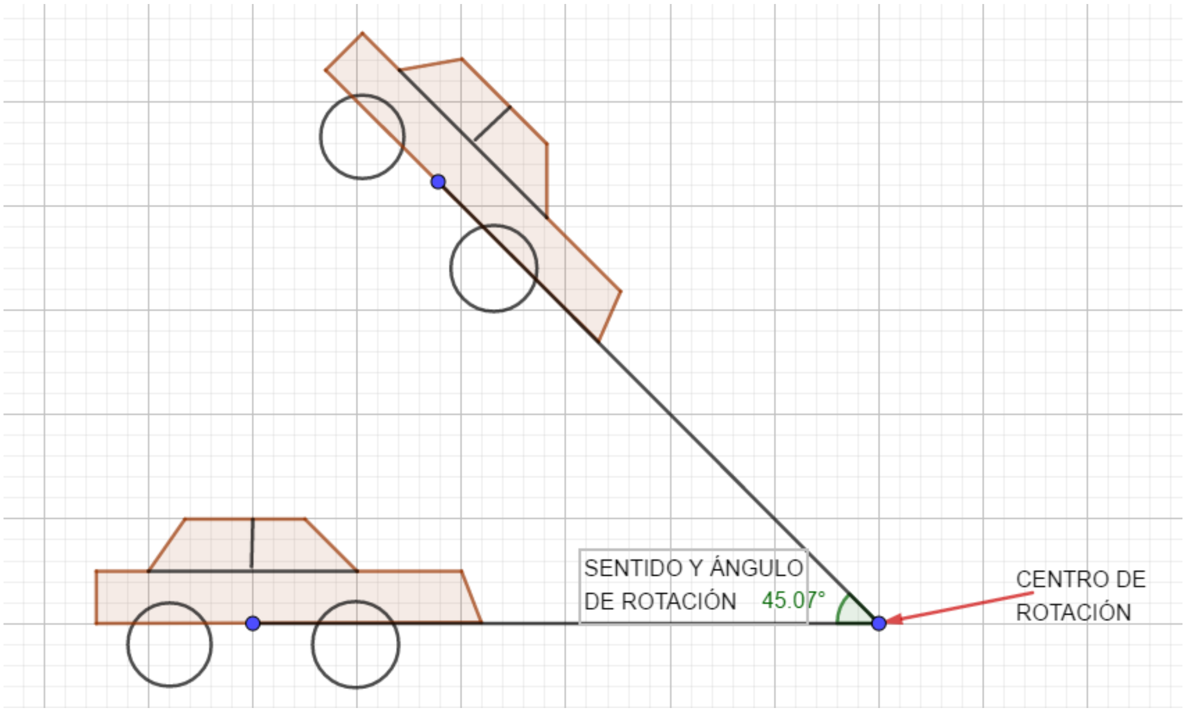


Figura 2. *Imagen de un automóvil realizando un movimiento de rotación en el sentido de las manecillas del reloj.*

Ejemplo

Observa la *Figura 2.* Se puede ver que a medida que el automóvil realiza el movimiento de rotación su orientación también cambia, por ejemplo, en la figura podemos observar que la línea que corresponde a la parte inferior del chasis y la línea correspondiente al capacete se encuentran inclinadas, formando un ángulo de 45°, ya que ese ha sido el valor de su rotación, tomando en cuenta que inicialmente el automóvil se encontraba sobre la horizontal.

Por lo que podemos deducir que si el ángulo de rotación fuera de 90°, estas dos líneas del automóvil también se encontrarían formando un ángulo de 90° poniéndolo de manera vertical, ¿cuál sería la posición del automóvil al realizar una rotación de 180°?

Para dar respuesta a esta pregunta tenemos que analizar la *Figura 2*, e ir imaginando que es lo que va pasando con la posición del automóvil al ir aumentando los grados de su rotación, pudiéndonos dar cuenta que lleva una tendencia a voltearse quedando su capacete abajo y el chasis arriba, lo que nos dice que **a los 180° el automóvil quedará de cabeza.**

Simetría

La simetría se considera una **reflexión**, tomando como espejo una línea llamada **eje de simetría**. Debido a que cuando nos reflejamos en un espejo o en alguna otra superficie reflejante la imagen que observamos es nuestro simétrico, ya que cumple con las características dadas por la simetría:

- Los puntos simétricos y los reflejados se encuentran sobre la misma línea.
- Los puntos de ambas figuras se localizan a la misma distancia del eje de simetría.
- La figura reflejada tendrá el mismo tamaño siempre solo que en dirección opuesta.

Existen múltiples ejemplos en la vida cotidiana sobre simetría, siendo los más comunes la estética de algunos seres vivos como los humanos, que son simétricos respecto a un eje imaginario. También los paisajes reflejados en algunos cuerpos de agua, estructuras de construcción para mantener su estática, entre otros.

En la siguiente *Figura 3* se observa un ejemplo de simetría.

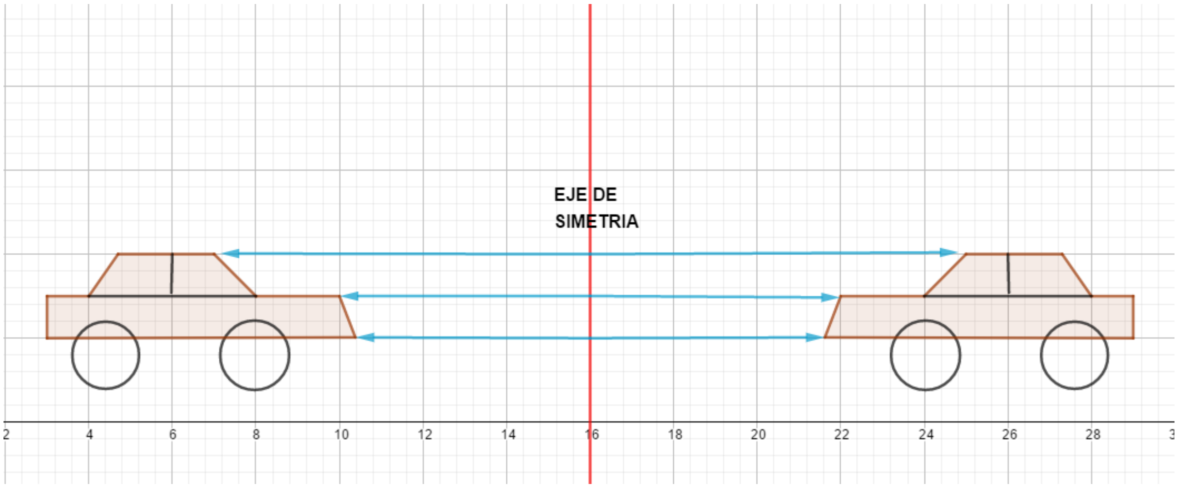


Figura 3. *Reflexión de un automóvil sobre un eje de simetría ubicado en x=16.*

Ejemplo

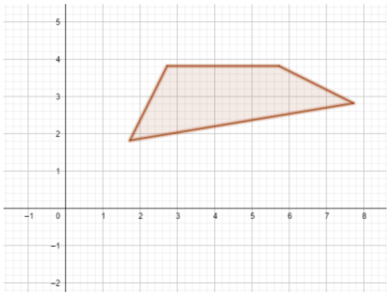
Tomando como referencia la *Figura 3,* si un punto del automóvil se encuentra a 10 unidades del eje de simetría, ¿a qué distancia se encontrará su imagen de él? ¿en qué valor de x se encontrará cada uno de los puntos?

Como bien sabemos, tanto el punto de una figura, como el punto dado por su imagen se encuentran a la misma distancia del eje de simetría, por lo tanto, la respuesta estaría dada por el doble de la distancia entre el punto y el eje de simetría, esto sería igual a 10(2) = **20 unidades.**

Para dar respuesta a la segunda pregunta, tenemos que recordar que en la *Figura 3* se puede apreciar que el eje de simetría se encuentra en x=16 por lo tanto cada uno de los puntos se encuentran en 16-10 y 16+10 obteniendo como resultado las líneas **x=6** y **x=26,** respectivamente.

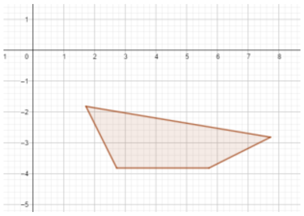
Practicando

Observa la siguiente figura y contesta las preguntas subrayando la respuesta correcta.

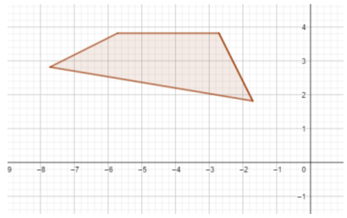


1. ¿Cuál de las figuras representa la reflexión de la figura anterior tomando como eje de simetría el eje x?

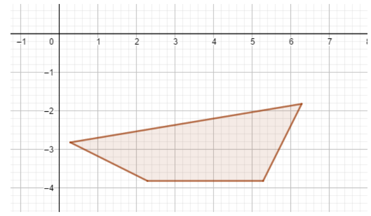
a)



b)

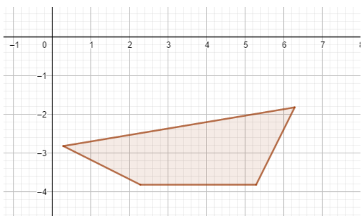


c)

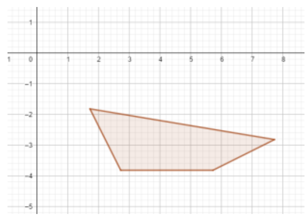


2. ¿Cuál imagen corresponde a la traslacion de la figura?

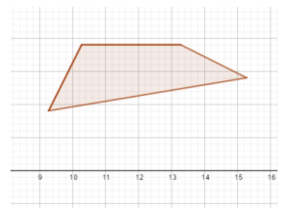
a)



b)

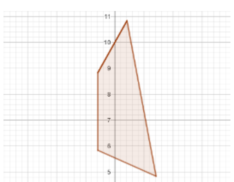


c)

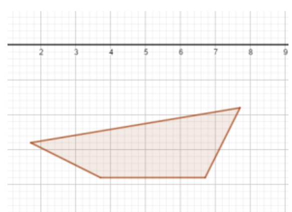


3. ¿Qué imagen corresponde a una rotcion de 90°?

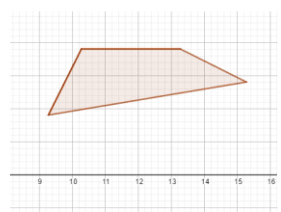
a)



b)



c)



4. Si tenemos un punto en la figura, el cual nombraremos punto A, y este se refleja sobre una recta que se encuentra a 8 cm, ¿Cuál será la distancia entre el punto A y su imagen?
   a) 12 cm
   b) 4 cm
   c) 8 cm
   d) 16 cm

Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Reconozco los diferentes tipos de transformaciones en el plano.		
Identifico las características y elementos de la traslación, la rotación y la simetría.		
Soy capaz de distinguir entre la traslación, rotación y simetría.		
Puedo representar figuras transformadas en el plano.		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Daniel Carreón, Rotación súper fácil, https://www.youtube.com/watch?v=kXwJOefEjJs
- Daniel Carreón, Traslación súper fácil, https://www.youtube.com/watch?v=QW602kH52Ec
- Daniel Carreón, simetría axial súper fácil, https://www.youtube.com/watch?v=Z8FWFvfNcsY

Referencias

- Garza, B. (2014). Geometría analítica. Primera edición. Pearson.
- Godino, J., Ruiz, F (2002) Geometría y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros, https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf
- Martes, M. (s.f.). Transformaciones Geométricas en el plano (Reflexión, Traslación Y Rotación) http://docs.uprb.edu/deptmate/material%20suplementario/CIME/10mo%20a%2012mo/T5%3B%20%20Reflexiones,%20traslaciones%20y%20Rotaciones%2810mo%20a%2012mo%29.pdf

Imágenes Tomadas de:

- https://www.canva.com/

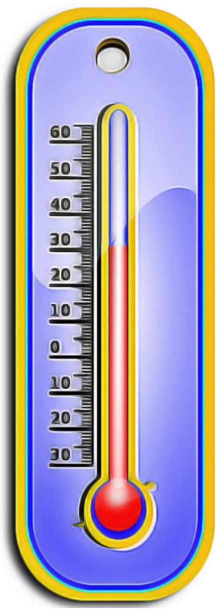
Lección 3. Ecuaciones lineales con una variable

Explorando

Lee y analiza el problema. Posteriormente responde las preguntas.

En la casa de María tienen un termómetro que les regaló su tío José que vive en Estados Unidos, el cual marca solo grados Fahrenheit, María estuvo registrando las temperaturas por 10 días; sabiendo que la relación está dada por: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, ayuda a completar su registro encontrando las equivalencias que faltan en grados Celsius.

Temperaturas registradas (Fahrenheit)	Conversión (Celsius)
68	20
70	21.11
71	
75.2	
77	
80	26.66
82.4	
86	
87.8	
89.6	32



1. ¿Para ti cuáles son las variables y las constantes en la ecuación?

2. Explica cómo obtuviste los resultados.

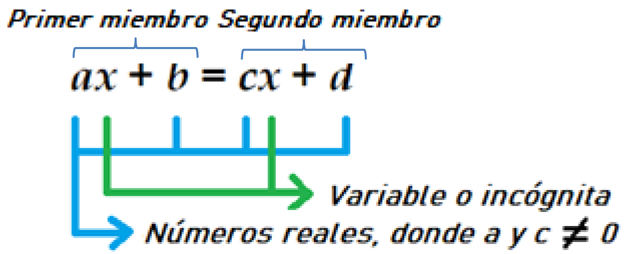
3. ¿Qué representa para ti la relación entre grados Fahrenheit y grados Celsius?

Comprendiendo

¿Qué es una ecuación lineal?

Una ecuación lineal de primer grado es una igualdad algebraica que utiliza una o más variables a la primera potencia y no contiene productos entre las variables, es decir una ecuación que implica solo sumas y restas de una variable a la primera potencia.

Estructura



Si tenemos

$$2x + 7 = 4x - 5$$

Entonces:

- El primer miembro es $2x + 7$ y el segundo miembro es $4x - 5$.
- Los coeficientes son 2, 4 y los números 7 y 5 son constantes conocidas.
- La x es la variable o incógnita que se desea encontrar su valor para que la igualdad sea verdadera.

Metodología para resolver ecuaciones

1. En caso de contar con paréntesis o corchetes en la ecuación, aplicar la propiedad distributiva.

Propiedad distributiva de la multiplicación	
Si a, b y c representan números reales cualesquiera, entonces:	
$a(b + c) = a(b) + a(c)$	$a(b - c) = a(b) - a(c)$
$(b + c)a = a(b) + a(c)$	$(b - c)a = a(b) - a(c)$

2.- Sumar o restar de cada miembro de una ecuación dada el mismo término (agrupar los términos de la variable en un miembro y las constantes en el otro miembro).

$2x + 7 = 4x - 5$	Escribir la ecuación.
$2x - 4x + 7 = 4x - 4x - 5$	Restar 4x en cada lado de la ecuación para
$2x - 4x + 7 = - 5$	agrupar las variables en un miembro.

2x - 4x + 7 – 7 = - 5 – 7 Restar 7 en cada miembro para agrupar los

2x – 4x = - 5 – 7 números en el otro miembro.

-2x = -12

3.- Multiplicar o dividir cada miembro por un mismo número diferente de cero (despejar la variable).

-2x = -12

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-12}{-2}$ Dividir cada miembro por -2 para despejar "x".

x = 6

4.- Sustituir en la(s) variable(s) de la ecuación original el valor encontrado (verificar o comprobar).

2x +7 = 4x – 5 Ecuación original.

2(6) + 7 = 4(6) – 5 Sustituir el valor encontrado x = 6.

12 + 7 = 24 – 5 Realizar las operaciones indicadas.

19 = 19 La solución es correcta.

Ejemplo 1: Resolver 4(2y + 5) = 3(5y – 2)

Solución

4(2y + 5) = 3(5y -2) Copiar la ecuación.

8y + 20 = 15y – 6 Aplicar la propiedad distributiva.

8y – 15y + 20 = 15y - 15y – 6 Restar 15y a cada miembro para agrupar

8y - 15y + 20 = - 6 las variables en un solo lado.

8y - 15y + 20 – 20 = - 6 – 20

8y - 15y = -6 – 20 Restar 20 a cada miembro y simplificar.

-7y = -26

$\frac{-7y}{-7} = \frac{-26}{-7}$ Dividir cada miembro por -7.

y = $\frac{26}{7}$

Comprobación

4(2y + 5) = 3 (5y – 2) Ecuación original.

4(($\frac{52}{7}$)+ 5) = 3(($\frac{130}{7}$) – 2) Realizar las operaciones indicadas.

$\frac{208}{7} + 20 = \frac{390}{7} - 6$

$\frac{208+140}{7} = \frac{390-42}{7}$ Obtenemos la igualdad lo que significa que

$\frac{348}{7} = \frac{348}{7}$ la solución es verdadera y la ecuación es válida.

Ejemplo 2: El salario quincenal que cobra un trabajador de la construcción es de $3600 después de restarle deducciones que alcanzan el 25% del mismo. ¿Cuál es el salario bruto que cobra este trabajador?

Solución

Denotamos x como el salario bruto, 0.25x es igual al 25% del total de deducciones al salario e igualamos al salario quincenal que cobra el trabajador, quedando expresado de la siguiente manera:

$$x - 0.25x = 3600$$

Como no tenemos paréntesis, y ya están agrupados los términos, le restamos a x el valor 0.25x.

$$0.75x = 3600$$

Aplicamos la metodología.

$0.75x = 3600$	Copiar la ecuación.
$\frac{0.75x}{0.75} = \frac{3600}{0.75}$	Dividir en ambos miembros 0.75.
$x = 4800$	Simplificamos despejando “x” y obtenemos el resultado.

Comprobación

$X - 0.25x = 3600$	Ecuación original.
$(4800) - 0.25(4800) = 3600$	Sustituimos el valor de x.
$4800 - 1200 = 3600$	Simplificamos.
$3600 = 3600$	Obtenemos la igualdad.

Practicando

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. $4x - 2 = x + 13$

Proceso	**Operaciones**
En caso de contar con paréntesis aplicar la propiedad distributiva.	
Sumar o restar de cada miembro de una ecuación dada, el mismo término.	
Multiplicar o dividir cada miembro por un mismo número diferente de cero (despejar la variable).	
Sustituir en la(s) variable(s) de la ecuación original el valor encontrado (verificar o comprobar).	
Resultado.	

Resuelve las siguientes situaciones utilizando la metodología presentada para la resolución de sistemas de ecuaciones de una variable.

Jesús leyó la quinta parte de un libro que equivale a 50 páginas. Elabora el modelo matemático y con base en él, responde, ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Proceso	Operaciones
Expresa la ecuación.	
Multiplicar o dividir cada miembro por un mismo número diferente de cero (despejar la variable). Sustituye.	
Interpreta el resultado.	

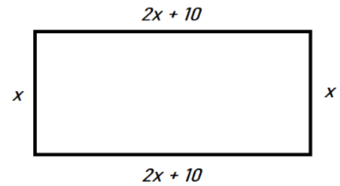
En la pescadería de Don Luis por la compra de camarón hay un descuento del 5% en el total de su compra. Si Juan pagó $570.00 y el Kilogramo tiene un costo de $50.00, ¿Cuántos kilogramos de camarón compro?

Proceso	Operaciones
Expresa la ecuación.	
Realiza la operación pertinente y simplifica.	
Multiplicar o dividir cada miembro por un mismo número diferente de cero (despejar la variable).	
Interpreta el resultado	

Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver el siguiente ejercicio:

Pedro desea conocer las dimensiones que tiene su parcela la cual requiere cercar, si al trazarla se da cuenta que tiene forma rectangular con un perímetro de 260 m, determina las dimensiones del terreno de Pedro apoyado del siguiente diagrama.



3(2x – 4) = 2(x -11)

$\frac{3}{4}x - 4 = 2 - \frac{1}{4}x$

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Puedo identificar las variables y las constantes en una ecuación.		
Puedo seguir la metodología para resolver una ecuación lineal.		
Establezco un modelo a partir de una situación real.		
Soy capaz de comprobar la solución de una ecuación lineal.		
En el caso de que hayas respondido “Tengo dudas” en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- iEnciclotareas, Ecuación Lineal de una Variable - Ejercicios Resueltos - Parte 3 Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=s9vEXIP5klk
- Superprof material didáctico, Ecuaciones de primer grado: Saberlo todo. Disponible en: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/ecuaciones/ecuaciones-de-primer-grado.html
- Julioprofe, Ecuaciones Lineales - Ejercicio 13 - ft. Casio Classwi. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=K3_83RW4Pxs
- Superprof material didáctico, Problemas y ejercicios de ecuaciones de primer grado. Disponible en: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/ecuaciones/problemas-de-ecuaciones-de-primer-grado.html

Referencias

- Swokowski, Cole. (2009). Algebra y trigonometría con geometría analítica. Cengage Learning. 12ª. Edición.
- Dolciani, Berman, Wooton. (1991). Algebra moderna y trigonometría. México. Publicaciones cultural.

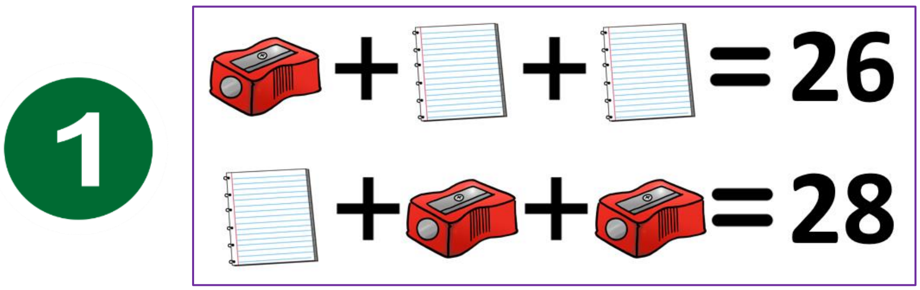
Imágenes tomadas de:

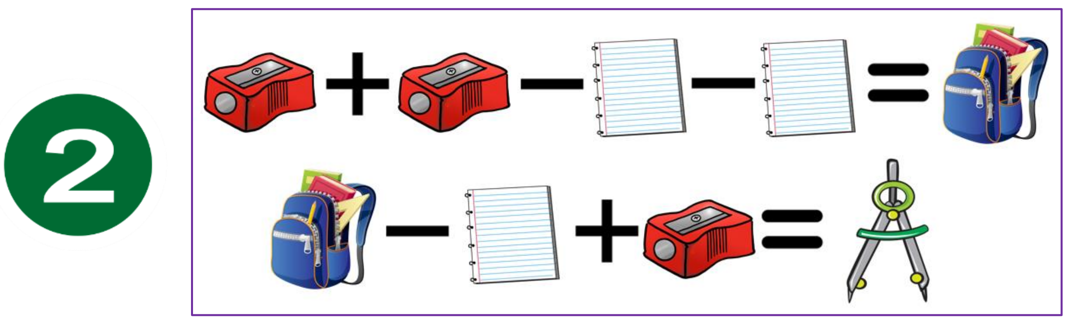
- https://www.klipartz.com/
- https://www.canva.com/

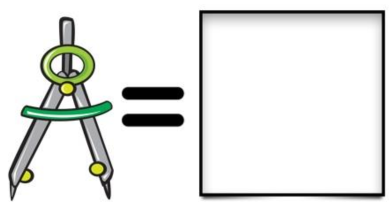
Lección 4. Sistemas de ecuaciones lineales con 2 y 3 variables

Explorando

Observa las imágenes y a partir del análisis para deducir los valores incógnitos, determina el valor del compás.







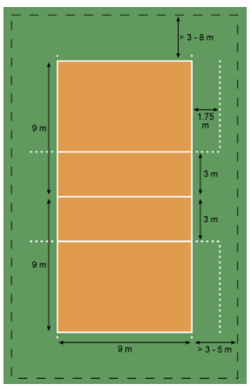
Explica brevemente cómo resolviste el problema para encontrar el valor del compás.

Comprendiendo

¿Qué son los sistemas de ecuaciones lineales?

Una ecuación lineal está definida como una igualdad en la que se combinan operaciones con la intervención de una o más variables (incógnitas), y que nos permiten dar solución a situaciones de diferentes contextos.

Ya en la lección 3 de este cuadernillo, aprendiste qué son las ecuaciones lineales de una variable y la manera de resolverlas, ahora conocerás qué son los sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres variables y el tipo de situaciones que pueden resolverse a partir del planteamiento y resolución de dichos sistemas.



No obstante, cuando en un problema planteado se identifican dos o más variables o incógnitas, entonces es necesario diseñar un **Sistema de Ecuaciones**, es decir, un conjunto de ecuaciones en las que se busca encontrar soluciones comunes para las variables involucradas.

Por ejemplo, si se desea fraccionar un terreno en lotes rectangulares, los lotes deben guardar ciertas características particulares en las dimensiones de los lados largo y corto, y ahí estamos apreciando la necesidad de utilizar dos variables diferentes, porque las dimensiones también son diferentes, lo que puede llevar a la construcción de un sistema de ecuaciones.

Por otra parte, es importante mencionar que la cantidad de ecuaciones que conforman un Sistema de Ecuaciones, estén en función de la cantidad de variables. Esto significa que, en caso de que se presenten dos incógnitas, para su resolución se requiere tener como mínimo 2 ecuaciones independientes en el sistema, si fueran tres las incógnitas, entonces como mínimo son requeridas 3 ecuaciones independientes y así continuamente.

Aunado a lo anterior, cabe señalar que, en el diseño general de ecuaciones, las letras finales del alfabeto como $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ son utilizadas como las variables que representan las incógnitas; mientras que las letras iniciales como $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ son utilizadas para referirse a constantes numéricas.

Una vez mencionado esto, vale la pena indicar que la estructura general de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, también conocidos como sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, por el hecho de que son 2 ecuaciones independientes y con 2 variables distintas, corresponde a:

$$a_1\boldsymbol{x} + b_1\boldsymbol{y} = c_1$$
$$a_2\boldsymbol{x} + b_2\boldsymbol{y} = c_2$$

Y podemos tener como ejemplo:

$$7\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} = -10$$
$$-2\boldsymbol{x} + 9\boldsymbol{y} = 13$$

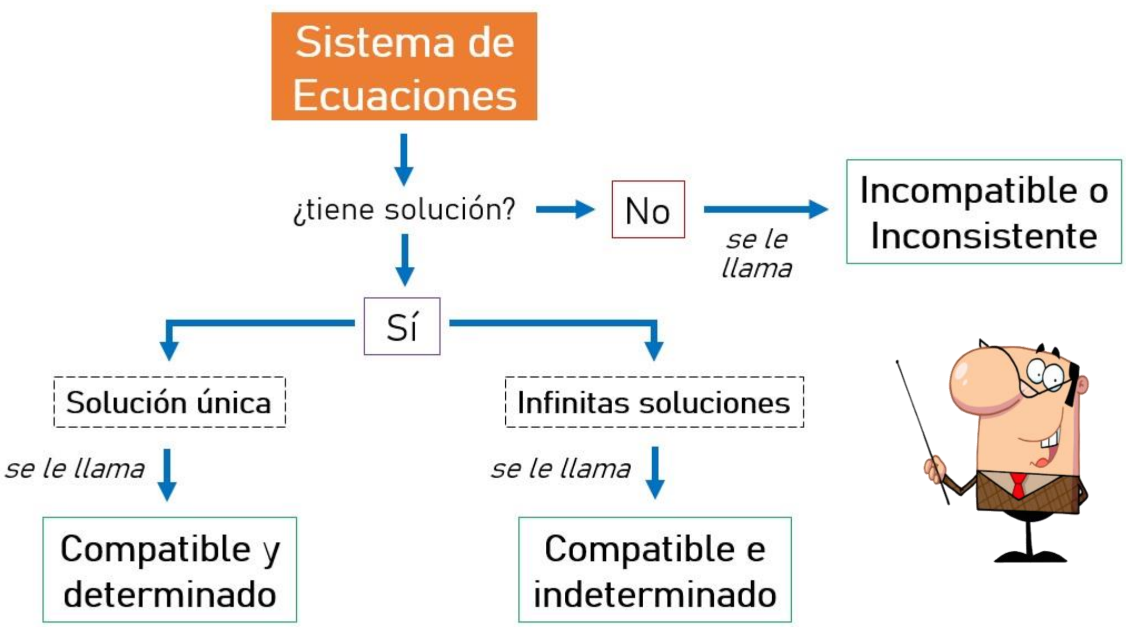
Mientras que para los sistemas de ecuaciones lineales con tres variables o sistemas de ecuaciones lineales de 3x3, porque corresponden a 3 ecuaciones independientes y con 3 variables distintas, su estructura general es:

$$a_1\boldsymbol{x} + b_1\boldsymbol{y} + c_1\boldsymbol{z} = d_1$$
$$a_2\boldsymbol{x} + b_2\boldsymbol{y} + c_2\boldsymbol{z} = d_2$$
$$a_3\boldsymbol{x} + b_3\boldsymbol{y} + c_3\boldsymbol{z} = d_3$$

Teniendo como ejemplo el siguiente sistema:

$$3\boldsymbol{x} + 5\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = -2$$
$$\boldsymbol{x} - 4\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{z} = 13$$
$$5\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} = 12$$

Cabe mencionar, que un sistema de ecuaciones lineales está diseñado para encontrar el valor de las variables involucradas y, por ende, dar solución a una situación en particular. Sin embargo, hay ocasiones en que los sistemas de ecuaciones no tienen solución, o bien, alguna o varias de las incógnitas pueden aceptar una infinidad de valores como solución, y, aun así, satisfacer con las condiciones del sistema. Por lo que, de acuerdo con la existencia de soluciones, los sistemas de ecuaciones se clasifican de la siguiente manera, tal y como lo presente el diagrama:



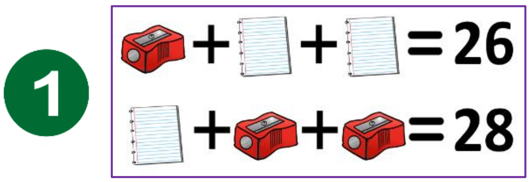
Asimismo, en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, existen varios métodos para resolverlos:

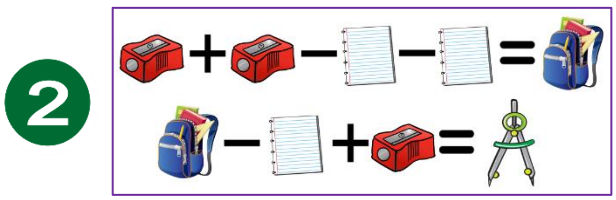
- Reducción (suma y resta)
- Determinantes
- Igualación
- Método gráfico
- Sustitución

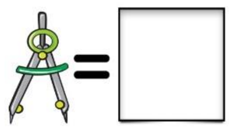
Siendo el **método de reducción** el que se utilizará en el desarrollo de esta lección.

Resolución de situaciones por medio de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables (2x2)

Para comenzar con el abordaje de este punto, retomemos la situación presentada al inicio de la lección, donde se solicita encontrar el valor de la figura del compás, a partir de determinar los valores del sacapuntas, del cuaderno y de la mochila:







Lo primero que se requiere, es la identificar las incógnitas y asignar las variables para plantear el sistema de ecuaciones. En este caso, observemos que en la *imagen 1*, tenemos dos incógnitas que corresponden a las imágenes del sacapuntas y del cuaderno, por lo que es posible que asignemos las variables de la siguiente manera:

x: valor del sacapuntas

y: valor del cuaderno

Ahora bien, apreciando el primer renglón de la *imagen 1*, donde un sacapuntas y dos cuadernos equivalen a 26, se puede establecer una **primera ecuación** lineal como:

$$x + 2y = 26$$

Por otra parte, en el segundo renglón de esa misma imagen, se aprecia que un cuaderno y dos sacapuntas equivalen a 28, es posible establecer como **segunda ecuación**:

$$2x + y = 28$$

De modo que el sistema de ecuaciones lineales que permite resolver la situación problema queda como:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 26 \\ 2x + y &= 28 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que se utilizará el método de reducción, es necesario precisar que este método requiere que ambas ecuaciones del sistema estén escritas en la forma:

$$ax + by = c$$

Lo cual no es un problema en el caso que se está abordando en este momento, pero cuando sea necesario, debe realizarse el reacomodo de términos correspondiente.

Al resolver el sistema utilizando el método de reducción, se realiza el siguiente procedimiento:

<table>
<tr><th colspan="2">$(\text{Ecuación } 1)\ \ x+2y=26$
$(\text{Ecuación } 2)\ \ 2x+y=28$</th></tr>
<tr><td colspan="2">Primeramente, se debe elegir una variable para eliminar, en este caso se procederá a eliminar la variable x</td></tr>
<tr><td>Para lograr la eliminación de x, es necesario que en ambas ecuaciones se tenga la misma cantidad de x, pero con signos opuestos para que al reducir resulte cero y sea eliminada.

Por lo que, apreciando el sistema, resulta conveniente multiplicar la ecuación 1 por -2:</td><td>$\begin{array}{c} -2[x+2y=26] \\ 2x+y=28 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} -2x-4y=-52 \\ 2x+\ \ y=\ \ 28 \end{array}$

La ecuación resultante es equivalente a la inicial, y permitirá la eliminación en lo sucesivo.</td></tr>
<tr><td>Nótese que, gracias al movimiento anterior, ya se cuenta con las condiciones necesarias para la eliminación, y se procede a realizar la suma de ambas ecuaciones resultantes:</td><td>$\begin{array}{rcrcr} -2x & - & 4y & = & -52 \\ 2x & + & y & = & 28 \\ \hline 0x & - & 3y & = & -24 \end{array}$

Quedando como:

$-3y=-24$</td></tr>
<tr><td>Se resuelve la ecuación resultante, despejando la variable y:</td><td>$y=\frac{-24}{-3}$

$y=8$</td></tr>
<tr><td>Una vez que ya se conoce el valor de una primera variable, en este caso de y, se procede a sustituir esta variable por su valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones lineales del sistema.

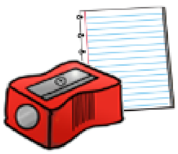
En este caso, por practicidad se elige sustituir el valor de y en la ecuación 1:</td><td>$\text{Ecuación } 1\text{:}\ \ x+2y=26$

$\Rightarrow\ x+2(8)=26$</td></tr>
<tr><td>Se resuelve la ecuación resultante, despejando la variable x:</td><td>$x+16=26$

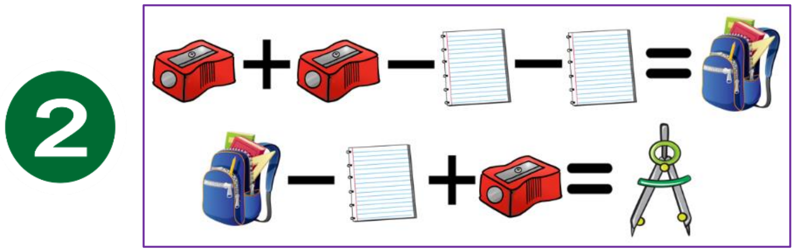
$x=26-16$

$x=10$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se concluye que los valores que satisfacen a ambas ecuaciones son $x=10$ y $y=8$, aunque también es posible expresar la solución como el par ordenado $(10,8)$</td></tr>
</table>

De acuerdo con los resultados obtenidos, hemos encontrado que el valor del sacapuntas es 10 y del cuaderno 8. Sin embargo, se requiere determinar el valor de la mochila, para entonces determinar el valor del compás.



Si se considera ahora la imagen 2 de nuestra situación:



Se tiene que el valor de dos sacapuntas, menos el valor de dos cuadernos es equivalente al valor de la mochila. Y sabiendo que cada sacapuntas vale 10 y cada cuaderno 8, entonces se puede deducir que:

$$= \mathbf{2(10) - 2(8) = 20 - 16 = 4}$$

Como ya conocemos que la mochila vale 4, y que ya contamos con todos los valores necesarios para determinar el valor del compás; tomando en cuenta el segundo renglón de la imagen 2 se plantea que:

$$= \mathbf{4 - 8 + 10 = 6}$$

Y de esta forma se concluye con la resolución de esta situación, donde a partir del planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, ha sido posible determinar que cada artículo tiene los siguientes valores:

- Sacapuntas: **10**
- Cuaderno: **8**
- Mochila: **4**
- Compás: **6**

Revisemos ahora otra situación problémica que nos permitirá fortalecer el contenido:

En un reconocido parque acuático de la ciudad, el costo por entrada para los adultos es de $500, mientras que para los niños es de $200. Si un día en el que asistieron 2,800 personas, recaudaron $800,000 solo por concepto de entradas, ¿cuántos niños asistieron al parque acuático ese día?"

Lo primero que se requiere para plantear el sistema de ecuaciones, es la identificación de las incógnitas y la asignación de variables, de modo que:

x: cantidad de niños

y: cantidad de adultos

Ahora bien, si el enunciado nos dice que ese día asistieron 2,800 personas entre niños y adultos, entonces se puede establecer una **primera ecuación** lineal como:

$$x + y = 2,800$$

Por otra parte, si se dice que el costo de cada entrada para niño es de $200, entonces se puede establecer que el total de dinero que se obtuvo únicamente por las entradas de los niños es:

$$(200)(x) = 200x$$

Y de manera similar, para determinar el total de ingresos por concepto de entradas de adultos, a $500 el boleto, se tiene entonces:

$$(500)(y) = 500y$$

Contemplando que el monto total recaudado fue de $800,000 y una vez ya definidas las expresiones algebraicas que representan los ingresos netos de niños y adultos, es posible establecer como **segunda ecuación**:

$$200x + 500y = 800,000$$

De modo que el sistema de ecuaciones lineales que permite resolver la situación problema queda como:

$$\begin{gathered} x + y = 2,800 \\ 200x + 500y = 800,000 \end{gathered}$$

Aunque si se observa la ecuación 2 con atención, es posible dividir cada término de la ecuación por 100, para obtener una ecuación equivalente, pero con valores constantes más pequeños que facilitarán las operaciones en el desarrollo de su solución.

Por lo que es posible presentar el sistema como:

$$\begin{gathered} x + y = 2,800 \\ 2x + 5y = 8,000 \end{gathered}$$

En caso de que no se llegue a percibir la posibilidad de reducir una ecuación como se ha realizado en este momento, no hay problema, ya que se llegará a la misma solución. Sin embargo, es bastante recomendable hacerlo en la medida de lo posible.

Procedemos ahora a resolver el sistema de ecuaciones por el método de reducción, mediante el siguiente procedimiento:

<table>
<tr><th colspan="2">$(\textbf{Ecuación 1}) \quad x + y = 2{,}800$
$(\textbf{Ecuación 2}) \quad 2x + 5y = 8{,}000$</th></tr>
<tr><td colspan="2">Primeramente, se debe elegir una variable para eliminar, en este caso se procederá a eliminar la variable x</td></tr>
<tr><td>Para lograr la eliminación de x, es necesario que en ambas ecuaciones se tenga la misma cantidad de x, pero con signos opuestos para que al reducir resulte cero y sea eliminada.
Por lo que, apreciando el sistema, resulta conveniente multiplicar la ecuación 1 por -2:</td><td>$$\begin{matrix} -2[x + y = 2{,}800] \\ 2x + 5y = 8{,}000 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2x - 2y = -5{,}600 \\ 2x + 5y = \quad 8{,}000 \end{matrix}$$
La ecuación resultante es equivalente a la inicial, y permitirá la eliminación en lo sucesivo.</td></tr>
<tr><td>Ahora que ya se cuenta con las condiciones necesarias para la eliminación, se procede a realizar la suma de las ecuaciones resultantes:</td><td>$$\begin{array}{rcrcr} -2x & - & 2y & = & -5{,}600 \\ 2x & + & 5y & = & 8{,}000 \\ \hline 0x & + & 3y & = & 2{,}400 \end{array}$$
Quedando como:
$$3y = 2{,}400$$</td></tr>
<tr><td>Se resuelve la ecuación resultante, despejando la variable y:</td><td>$$y = \frac{2{,}400}{3}$$
$$y = 800$$</td></tr>
<tr><td>Una vez que ya se conoce el valor de una primera variable, en este caso de y, se procede a sustituir esta variable por su valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones lineales del sistema.
En este caso, por practicidad se elige sustituir el valor de y en la ecuación 1:</td><td>$$\textbf{Ecuación 1}: \; x + y = 2{,}800$$
$$\Rightarrow \; x + 800 = 2{,}800$$</td></tr>
<tr><td>Se resuelve la ecuación resultante, despejando la variable x:</td><td>$$x + 800 = 2{,}800$$
$$x = 2{,}800 - 800$$
$$x = 2{,}000$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se concluye que los valores que satisfacen a ambas ecuaciones son $x = 2{,}000$ y $y = 800$, aunque también es posible expresar la solución como el par ordenado $(2{,}000 \,, \; 800)$</td></tr>
</table>

Una vez resuelto el sistema, es necesario dar la interpretación adecuada a los resultados obtenidos para atender la petición del problema; de modo que si la variable x representa la cantidad de niños que asistieron ese día al parque acuático y que y se refiere a la cantidad de adultos, se concluye entonces que, para que se cumplan las condiciones presentadas, la asistencia fue de 2,000 niños y también de 800 adultos.

Resolución de situaciones por medio de sistemas de ecuaciones lineales con tres variables (3x3)

Similar a la manera en que se abordó el apartado anterior, se partirá de la siguiente situación problémica:

Una empacadora de productos enlatados distribuye su mercancía en latas de diferentes presentaciones y costos de acuerdo con la siguiente tabla:

Peso	Costo
250 gr	$14
500 gr	$22
1 kg	$36

Si a un cliente le ha surtido un lote combinado de 40 latas con un peso neto de 21 kg y un importe de $896, ¿cuántas latas de cada tipo se han comprado?

Considerando que la cantidad específica de latas en sus distintas presentaciones son las incógnitas del problema, entonces se procede a realizar la asignación de variables para cada tipo, considerando que como son presentaciones diferentes, entonces es necesario utilizar variables distintas:

x: latas de 250 gr

y: latas de 500 gr

z: latas de 1 kg

Nótese que como se tienen 3 variables en esta situación, esto implica que entonces se plantearán al menos 3 ecuaciones lineales en el sistema, ya que se debe recordar que la cantidad de ecuaciones que conforman un sistema depende de la cantidad de variables involucradas.

Dado que en el enunciado se menciona que el lote que se ha vendido es de 40 latas, una **primera ecuación** puede quedar planteada como:

$$x + y + z = 40$$

Asimismo, el problema brinda información respecto al peso del lote y de las latas en sus diferentes presentaciones, por lo que es posible plantear una segunda ecuación.

En este sentido, el peso total de las latas en presentación de 250 gr corresponde a:

$$(250)(x) = 250x$$

El de las latas de 500 gr a:

$$(500)(y) = 500y$$

Y para representar el peso de las latas de 1 kg, es preciso considerar que 1 kg = 1,000 gr, ya que es necesario utilizar las mismas unidades de medida. De modo que, para esta última presentación, su peso queda determinado por:

$$(1,000)(z) = 1,000z$$

Planteando la **segunda ecuación** como:

$$\mathbf{250x + 500y + 1,000z = 21,000}$$

Nótese que también se ha tenido que realizar la equivalencia de kilogramos a gramos, para representar los 21 kg que pesa el lote, porque es importante mantener las mismas unidades de medida.

Otro detalle que resulta importante considerar de esta segunda ecuación, es que puede simplificarse al dividir cada término por 250, y encontrar una ecuación equivalente con valores constantes más pequeños, tal y como se presentó una situación similar cuando se revisó el apartado de **Resolución de situaciones mediante sistemas lineales de 2x2**:

$$\mathbf{250x + 500y + 1,000z = 21,000 \implies x + 2y + 4z = 84}$$

Por otra parte, es posible establecer una tercera ecuación lineal a partir de la información que se proporciona respecto a los costos.

Considerando que las latas de 250 gr representadas por la variable x, tienen un costo de $14, la expresión algebraica que representa el costo de todas las latas de esta presentación queda determinada como:

$$\mathbf{(14)(x) = 14x}$$

Para las latas en presentación de 500 gr:

$$\mathbf{(22)(y) = 22y}$$

Y para expresar algebraicamente el costo de las latas de 1 kg:

$$\mathbf{(36)(z) = 36z}$$

Contemplando que el costo total del lote fue de $896, entonces la **tercera ecuación** se plantea como:

$$\mathbf{14x + 22y + 36z = 896}$$

Y también resulta ser una ecuación que puede ser reducida si se divide por 2, de manera que se puede considerar como **tercera ecuación** a:

$$\mathbf{7x + 11y + 18z = 448}$$

Teniendo como sistema de ecuaciones lineales de 3x3 para resolver este problema a:

$$\begin{aligned} \mathbf{x + y + z} &= \mathbf{40} \\ \mathbf{x + 2y + 4z} &= \mathbf{84} \\ \mathbf{7x + 11y + 18z} &= \mathbf{448} \end{aligned}$$

Es importante verificar que cada una de las ecuaciones que integran el sistema se encuentren escritas de la forma $\mathbf{ax + by + cz = d}$ antes de comenzar a resolver. En este caso, se recurrirá nuevamente al método de reducción:

$$\begin{array}{rr} \text{(Ecuación 1)} & \boldsymbol{x+y+z=40} \\ \text{(Ecuación 2)} & \boldsymbol{x+2y+4z=84} \\ \text{(Ecuación 3)} & \boldsymbol{7x+11y+18z=448} \end{array}$$	
Como primer paso, se debe elegir una variable para eliminar dentro del sistema. En este caso se optará por eliminar la variable z, aunque desde luego, puede optarse por cualquier otra.	
Tomando en cuenta que ahora se tienen 3 ecuaciones con 3 variables cada una, se comenzará por eliminar la variable z de las **ecuaciones 1** y **2.** Para ello, nótese que los coeficientes de dicha variable en las **ecuaciones 1** y **2** corresponden a 1 y 4 respectivamente, por lo que prácticamente se requiere multiplicar la **ecuación 1** por -4, para conseguir tener la misma cantidad absoluta de z, pero con signos opuestos:	$$\begin{array}{l} -4[\boldsymbol{x+y+z=40}] \\ \boldsymbol{x+2y+4z=84} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \boldsymbol{-4x-4y-4z=-160} \\ \boldsymbol{x+2y+4z=\quad 84} \end{array}$$ *La ecuación resultante es equivalente a la inicial, y permitirá la eliminación en lo sucesivo.*
Observa que, gracias al movimiento anterior, ya se cuenta con las condiciones necesarias para la eliminación de z, y se procede a realizar la suma de ambas ecuaciones resultantes:	$$\begin{array}{rcrcrcr} -4x & - & 4y & - & 4z & = & -160 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 84 \\ \hline -3x & - & 2y & + & 0z & = & -76 \end{array}$$ *Quedando simplemente como:* $$-3x-2y=-76$$ *A esta ecuación resultante se le llamará (A) y se mantendrá en reserva.*
Considerando que ya se trabajó con las **ecuaciones 1** y **2**, ahora corresponde el turno de tomar la **ecuación 3** junto con cualquiera de las otras dos, para proceder a eliminar también la variable z. En este caso, serán las **ecuaciones 1** y **3**, procediendo a multiplicar la **ecuación 1** por -18 para obtener la misma cantidad absoluta de z, pero con signos opuestos:	$$\begin{array}{c} -18[\boldsymbol{x+y+z=40}] \\ \boldsymbol{7x+11y+18z=448} \\ \Downarrow \\ \boldsymbol{-18x-18y-18z=-720} \\ \boldsymbol{7x+11y+18z=\quad 448} \end{array}$$
Se realiza la suma de ambas ecuaciones resultantes:	$$\begin{array}{rcrcrcr} -18x & - & 18y & - & 18z & = & -720 \\ 7x & + & 11y & + & 18z & = & 448 \\ \hline -11x & - & 7y & + & 0z & = & -272 \end{array}$$

	Quedando simplemente como: $$-11x - 7y = -272$$ *A esta ecuación resultante se le llamará (B).*
Ahora se plantea un nuevo sistema de ecuaciones lineales con dos variables, utilizando las **ecuaciones A** y **B**:	$$\begin{array}{r} -3x - 2y = -76 \\ -11x - 7y = -272 \end{array}$$
Para resolver el nuevo sistema de ecuaciones lineales con dos variables, se procede a eliminar una de las dos variables que se presentan, optándose en esta ocasión por eliminar la variable y. Para ello, se multiplicará la **ecuación A** por 7 y la **ecuación B** por -2, para de esta forma conseguir tener la misma cantidad absoluta de y, pero con signos opuestos:	$$\begin{array}{c} 7[-3x - 2y = -76] \\ -2[-11x - 7y = -272] \end{array}$$ $$\Rightarrow \begin{array}{r} -21x - 14y = -532 \\ 22x + 14y = \quad 544 \end{array}$$
Se realiza la suma de ambas ecuaciones resultantes, consiguiendo así la eliminación de y:	$$\begin{array}{rcrcr} -21x & - & 14y & = & -532 \\ 22x & + & 14y & = & 544 \\ \hline x & + & 0y & = & 12 \end{array}$$ *Teniendo que:* $$x = 12$$
Una vez que ya se conoce el valor de una primera variable, en este caso de x, se procede a sustituir esta variable por en la **ecuación A** o en la **ecuación B**. En este caso, resulta más práctico realizar la sustitución en la **ecuación A**:	$$\text{Ecuación } A: \; -3x - 2y = -76$$ *Y como* $x = 12$*, entonces:* $$-3(12) - 2y = -76$$ $$-36 - 2y = -76$$
Se resuelve la ecuación resultante, despejando la variable y:	$$-36 - 2y = -76$$ $$-2y = -76 + 36$$ $$-2y = -40$$ $$y = \frac{-40}{-2}$$ $$y = 20$$
Una vez conocidos los valores de las variables x y y, se realiza la sustitución de estos utilizando cualquiera de las 3	$$\text{Ecuación } 1: \quad x + y + z = 40$$ *Y como* $x = 12$ *y* $y = 20$*, entonces:*

ecuaciones iniciales del ejercicio. En este caso, se optará por realizar las sustituciones en la **ecuación 1**:	$\mathbf{12+20+z=40}$ $\mathbf{32+z=40}$
Y se resuelve la ecuación resultante, despejando la variable z:	$\mathbf{32+z=40}$ $\mathbf{z=40-32}$ $\mathbf{z=8}$
Se concluye que los valores que satisfacen a la terna de ecuaciones son $\mathbf{x=12}$, $\mathbf{y=20}$ y **z**$=\mathbf{8}$, aunque también es posible expresar la solución como $(\mathbf{12,20,8})$. Una vez resuelto el sistema, se concluye entonces que el cliente de la empacadora de productos enlatados ha comprado 12 latas de la presentación de 250 gr, 20 latas de la presentación de 500 gr y 8 latas más de la presentación de 1 kg. 	

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de 3x3 por el método de reducción, apóyate de la tabla como guía para encontrar las soluciones:

$$\begin{cases} \mathbf{x-y-z=0} \\ \mathbf{x+2y-5z=2} \\ \mathbf{3x-2y-4z=1} \end{cases}$$

Guía para el desarrollo	Desarrollo
Elimina la variable z de las ecuaciones **1 y 2.**	
La ecuación resultante tras la eliminación de la variable **z**, utilizando las **ecuaciones 1** y **2**, la llamaremos **ecuación A.**	
Toma la **ecuación 3** junto con la ecuación 1 o 2 según sea tu preferencia, y vuelve a eliminar la variable z.	
La ecuación resultante tras la eliminación de la variable **z**, utilizando las **ecuaciones 3** y **1 o 2**, la llamaremos **ecuación B.**	
Plantea ahora un nuevo sistema de ecuaciones lineales, utilizando las **ecuaciones A** y **B.**	
Elimina la variable y del sistema de ecuaciones anterior.	
Realiza el despeje de la variable x para conocer su valor.	
Sustituye el valor de la variable x en la **ecuación A.**	
Despeja la variable y.	

Con los valores de las variables x y y, realiza la sustitución de estos utilizando cualquiera de las 3 ecuaciones iniciales del ejercicio:	
Despeja la variable z:	
El sistema de ecuaciones tiene por soluciones:	$x =$ $y =$ $z =$

$$\begin{cases} 2x + y + z = -9 \\ x + 2y + 5z = -6 \\ 3x - 5y + 4z = 15 \end{cases}$$

Guía para el desarrollo	**Desarrollo**
Elimina la variable z de las ecuaciones **1 y 2.**	
La ecuación resultante tras la eliminación de la variable **z**, utilizando las **ecuaciones 1** y **2**, la llamaremos **ecuación A.**	
Toma la **ecuación 3** junto con la ecuación 1 o 2 según sea tu preferencia, y vuelve a eliminar la variable z:	
La ecuación resultante tras la eliminación de la variable **z**, utilizando las **ecuaciones 3** y **1 o 2**, la llamaremos **ecuación B.**	
Plantea ahora un nuevo sistema de ecuaciones lineales, utilizando las **ecuaciones A** y **B.**	
Elimina la variable y del sistema de	

ecuaciones anterior.	
Realiza el despeje de la variable x para conocer su valor.	
Sustituye el valor de la variable x en la **ecuación A.**	
Despeja la variable y.	
Con los valores de las variables x y y, realiza la sustitución de estos utilizando cualquiera de las 3 ecuaciones iniciales del ejercicio.	
Despeja la variable z.	
El sistema de ecuaciones tiene por soluciones:	$x =$ $y =$ $z =$

Soluciona la siguiente situación a partir del planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, apóyate de la tabla guía para resolver

- Una persona invirtió \$23,000 en dos cuentas bancarias distintas con un rendimiento del 7% y 10% respectivamente. Determina la cantidad de dinero que invirtió en cada cuenta, si al término del plazo de inversión recibió un rendimiento total de \$2,060.

Guía para el desarrollo	Desarrollo
¿Qué trato de encontrar?	
¿Qué información tengo?	
Asigna las variables x y y para expresar los valores desconocidos.	
Expresa algebraicamente una ecuación que represente la relación entre las variables y la cantidad invertida, la cual llamaremos **ecuación 1.**	
Expresa algebraicamente una ecuación que represente la relación entre las variables y el rendimiento recibido, la cual llamaremos **ecuación 2.**	
Plantea el sistema de ecuaciones lineales de 2x2, utilizando las **ecuaciones 1** y **2.**	
Elimina la variable y del sistema de ecuaciones anterior.	
Realiza el despeje de la variable x para conocer su valor.	

Sustituye el valor de la variable x en la **ecuación 1** o en la **ecuación 2.**	
Despeja la variable y para conocer su valor.	
El sistema de ecuaciones tiene por soluciones.	$x =$ $y =$
Interpreta las soluciones para expresar la conclusión de la situación planteada, ¿qué representan los valores encontrados para cada variable?	

Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver los siguientes ejercicios.

- Al circular un terreno con forma de rectángulo con malla ciclónica fueron requeridos 62 metros lineales; pero si el lado corto se duplica, entonces la cantidad de malla que se requeriría para circularlo sería de 86 metros, ¿cuáles son las dimensiones de dicho terreno?

- La suma de los 3 ángulos interiores de un triángulo es 180°. La suma del mayor y el mediano es 146°, mientras que la suma del mediano y el menor es 82°. Encuentra la medida de cada ángulo.

Autoevaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Entiendo qué es un sistema de ecuaciones lineales.		
Soy capaz de explicar para qué sirven los sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres variables.		
Soy capaz de identificar las variables involucradas en un planteamiento problémico.		
Comprendo qué es el método de reducción para resolver sistemas de ecuaciones lineales con 2 y 3 variables y cómo llevarlo a cabo.		
Puedo diseñar y resolver un sistema de ecuaciones lineales para resolver una situación problema.		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Jaque en mates, problemas de sistemas de ecuaciones. Disponible en https://youtu.be/Sqq_ed4V1BA
- Khan Academy, Resolver sistemas de ecuaciones por eliminación: los pastelillos del rey. Disponible en: https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:systems-of-equations/x2f8bb11595b61c86:equivalent-systems-of-equations-and-the-elimination-method/v/king-s-cupcakes-solving-systems-by-elimination
- Matemáticas profe Alex, Sistemas de ecuaciones 2x2: Método de reducción-eliminación. Disponible en https://youtu.be/0ilTVp5uRz8
- Math2me, Plantear problemas de sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Disponible en https://youtu.be/gd95JhLC4LU
- Portal Académico CCH UNAM, Resolución de problemas 3x3. Disponible en: https://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas1/unidad4/resoluciondeproblemas3x3
- Profe Walter, Sistemas de ecuaciones de 3x3 Método de reducción. Disponible en: https://youtu.be/19Jp0j3QJLY

Referencias

- Cano, P. (2014). *Asómate a las matemáticas aplicadas*. México: Editorial Progreso.
- Cuéllar, J. (2010). *Álgebra*. Segunda Ed. México: McGraw Hill Educación.
- Garza, B. (2014). *Álgebra*. México: Pearson.
- Jiménez, M. y Estrada, R. (2018). *Matemáticas 1*. Segunda Ed. México: Pearson.

Imágenes tomadas de:

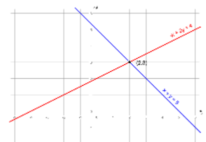
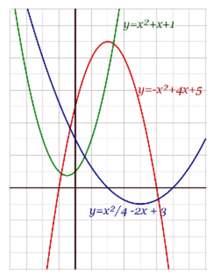
- https://www.klipartz.com/
- www.canva.com

Lección 5. Ecuaciones cuadráticas

Explorando

Relaciona las columnas según corresponda.

- Una ecuación lineal es…
- Ejemplo de ecuación lineal.
- Es la representación gráfica de una función lineal.
- Definición de una ecuación cuadrática.
- Ejemplo de ecuación cuadrática.
- Es la representación gráfica de una función cuadrática.
- Es el resultado de 6^2
- Es el procedimiento para resolver una ecuación a través del despeje

- 
- Es aquella en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2.
- 

- $x+10=15$
  $x=15-10$
  $x=5$
  Entonces $5+10=15$
- Es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, en las que aparecen variables y que involucra únicamente sumas y restas de una variable a la primera potencia
- 36
- $ax^2 + bx + c = 0$
- $2x - 3 = 3x + 2$

Comprendiendo

En esta lección se abordan distintos tipos de ecuaciones cuadráticas, conocerás las principales características de las ecuaciones cuadráticas y aprenderás a resolverlas a través de diversos métodos según sus características.

Ecuaciones cuadráticas

Además de las funciones lineales, uno de los tipos más comunes de funciones polinomiales con las que trabajamos en el álgebra es la función cuadrática. Una **función cuadrática** es una función que puede ser descrita por una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c, donde\ a \neq 0$$

Ningún término en la función polinomial tiene un grado mayor que 2. Las funciones cuadráticas son útiles cuando trabajamos con áreas, y frecuentemente aparecen en problemas de movimiento que implican gravedad o aceleración.

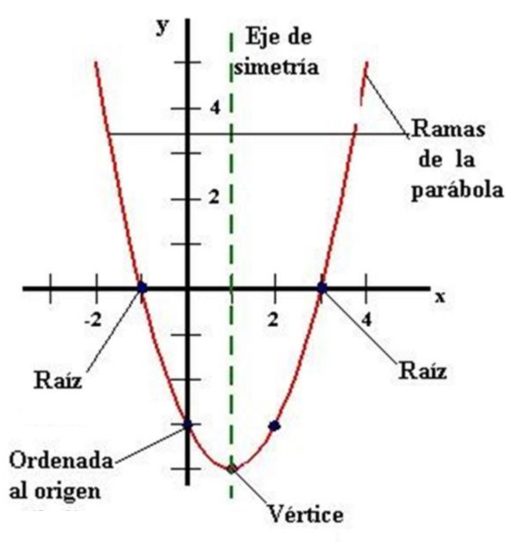
Las gráficas de las funciones cuadráticas tienen características que están estrechamente relacionadas con su forma simbólica. A medida que exploremos estas gráficas, aprenderemos a identificar estas características, y veremos algunas de las maneras de estructurar las ecuaciones cuadráticas.

Gráfica de una ecuación cuadrática

La gráfica de una función cuadrática es una curva con forma de **U** llamada *parábola*. Puede ser trazada dibujando soluciones de la ecuación, encontrando el vértice y usando el eje de simetría para graficar puntos seleccionados, o encontrando las raíces y el vértice.

A continuación, se muestran los principales elementos de la gráfica de una ecuación cuadrática:

- **Vértice.** Es el punto de intercepción de la gráfica con el eje de simetría.
- **Intercepciones con el eje x (Raíz).** Corresponde a las soluciones de la ecuación.
- **Ordenada al origen**. Es el valor del término independiente de la ecuación.
- **Eje de simetría.** Recta que pasa por el foco y el vértice.



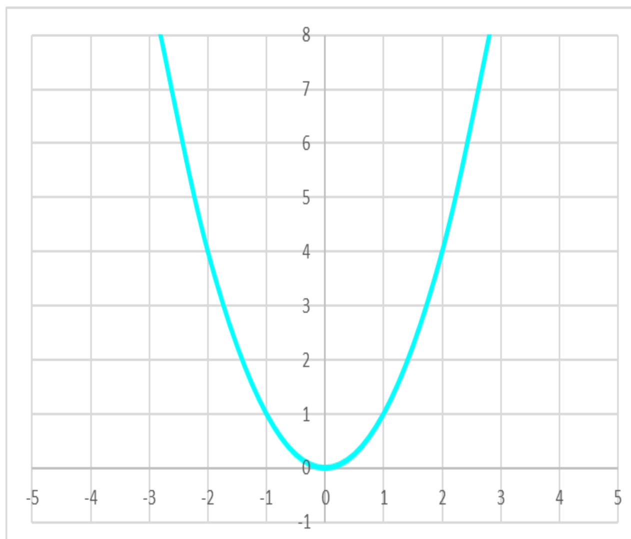
La ecuación cuadrática es una función polinomial que se puede escribir como $y = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes *a, b* y *c* son números reales y cada uno de ellos aporta datos para la gráfica de la ecuación.

- La gráfica de una ecuación de cuadrática es una parábola.
- El signo del **coeficiente *a*** determina hacia donde abre la parábola: sí es positivo abre hacia arriba, sí es negativo abre hacia abajo.
- A mayor valor de *a*, menor será la apertura de la gráfica.
- La relación de ***b* y *a*** determina el desplazamiento de la gráfica en el eje de las ordenadas (eje y).
- La proporción y el sentido de desplazamiento de la gráfica en el eje de las abscisas (eje x) corresponde a $\frac{-b}{2a}$, que es la coordenada del vértice de la parábola.
- Si el resultado del término $\frac{-b}{2a}$ es positivo el desplazamiento es hacia la derecha, si es negativo hacia la izquierda.
- El **valor de *c*** que es el término independiente, determina el cruce de la gráfica con el eje y corresponde a la ordenada del punto de intercepción de la gráfica con el eje y.

Ejemplo

Analizar la ecuación cuadrática $y = x^2$ y hacer deducciones con base en sus parámetros *a, b* y *c.*

X	Y	Punto (x, y)
-3	9	(-3, 9)
-2	4	(-2, 4)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)
3	9	(3, 9)



El valor de a = 1, entonces es una parábola que abre hacia arriba.

El valor de b = 0, entonces no está trasladada, su eje de simetría es el eje y.

El valor de c = 0, corta al eje y en 0, es decir pasa por (0, 0).

Se tabulan algunos valores para tener una idea clara de la gráfica correspondiente.

Ecuaciones cuadráticas incompletas

Se llama ecuaciones incompletas de segundo grado o cuadráticas, cuando la ecuación carece del término en x o el término independiente y se clasifican en dos tipos: **ecuaciones cuadráticas incompletas puras** y **mixtas.**

1. Ecuaciones cuadráticas incompletas puras, de la forma: $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$

Para resolver las ecuaciones cuadráticas incompletas puras de la forma $ax^2 + c = 0$, debe despejar la incógnita como se muestra a continuación.

$$ax^2 + c = 0$$

Pasa ***c*** al segundo miembro con el signo contrario,

$$ax^2 += -c$$

luego se pasa ***a*** ; como está multiplicando se pasa dividiendo,

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

y por último el cuadrado de x pasa con la operación inversa que es la radicación, en este caso raíz cuadrada.

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Entonces, las **raíces** o **soluciones** de una ecuación cuadrática incompleta pura son:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Si a y c tienen el mismo signo, las raíces son imaginarias por ser la raíz cuadrada de una cantidad negativa, y si tienen signo distinto las raíces son reales.

Ejemplo de ecuación cuadrática incompletas pura

Para encontrar las soluciones de la ecuación $4x^2 - 100 = 0$

Observa que es una ecuación cuadrática incompleta pura ya que cumple con la forma general de este tipo de ecuaciones $ax^2 + c = 0$, en donde a = 4 y c = 100

$$ax^2 + c = 0 \qquad\qquad 4x^2 + 100 = 0$$

$$4x^2 - 100 = 0$$

Pasa ***c*** al segundo miembro con el signo contrario (en este caso menos),

$$ax^2 += -100$$

luego se pasa ***a*** ; como está multiplicando se pasa dividiendo,

$$x^2 = -\frac{-100}{4}$$

y por último el cuadrado de *x* pasa con la operación inversa que es la radicación, en este caso raíz cuadrada.

$$x = \pm\sqrt{-\frac{-100}{4}}$$

Entonces, las **raíces** o **soluciones** de esta ecuación cuadrática incompleta pura son:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{-100}{4}} \qquad\qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{-100}{4}}$$

Y se resuelve de la siguiente manera:

Se utiliza la Ley de signos.

$$x_1 = \sqrt{-\frac{-100}{4}} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{-100}{4}}$$

Como ambos son negativos, se convierte a positivos, quedando:	$x_1 = \sqrt{\frac{100}{4}}$	$x_2 = -\sqrt{\frac{100}{4}}$
Se simplifica y se extrae la raíz cuadrada.	$x_1 = \sqrt{25}$	$x_2 = -\sqrt{25}$
Obteniendo los siguientes resultados:	$x_1 = 5$	$x_2 = -5$

2. Ecuaciones cuadráticas incompletas mixtas, de la forma: $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

La forma general de una ecuación cuadrática incompleta mixta es

$$ax^2 + bx = 0$$

Término cuadrático
(está elevado a la segunda potencia)

Término lineal
(que no está elevando a ninguna potencia)

Ambos miembros tienen como elemento común *x*.

Para resolver este tipo de ecuaciones se emplea la factorización (por factor común) y una de las propiedades del producto.

- Se factoriza x de la expresión y se iguala a 0.
- Se utiliza la propiedad del producto cero y se despeja la variable en cada uno de los factores.
- Si el primer factor es igual a 0, se tiene la solución: $x_1 = 0$
- Si el segundo factor $ax + b$ es igual a 0, se tiene la solución:

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ejemplo de ecuación cuadrática incompleta mixta

Para resolver la ecuación $7x^2 - 4x$=0

Observa que es una ecuación cuadrática incompleta mixta ya que cumple con la forma con la forma general de este tipo de ecuaciones $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$, en donde *a=7* y *b=-4.*

$$\boldsymbol{ax^2 - bx} = 0 \qquad\qquad \boldsymbol{7x^2 - 4x} = 0$$

Se reemplazan los valores de a y b en las expresiones que permiten encontrar las soluciones y se realizan las operaciones.

$$\boldsymbol{7x^2 - 4x} = 0$$

Primero debes realizarla factorización por factor común, es decir buscar el elemento común de ambos términos, en este caso es:

$$\boldsymbol{x}(\quad)$$

Busca un término que multiplicado por $\boldsymbol{x}$ te de como resultado 7$\boldsymbol{x^2}$. En este caso es 7***x.***

$$\boldsymbol{x(7x\quad) = 0}$$

Porque (x)(7x)= $7x^2$

Ahora busca un término que al multiplicarlo por $\boldsymbol{x}$ obtengas -4x. En este caso será -4

$$\boldsymbol{x(7x - 4) = 0}$$

Porque (x)(-4)=-4x

Ahora se toman los dos términos obtenidos y se igualan a cero y se realizan los despejes correspondientes. Recuerda que debe pasar los términos con la operación contraria, es decir que si está multiplicando debe pasar dividiendo, si está sumando debe pasar restando, etc.

$$\boldsymbol{x_1 = 0}$$

$$\boldsymbol{7x - 4 = 0}$$

$$\boldsymbol{x - 4 = -\frac{-4}{7}}$$

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{4}{7}}$$

En este tipo de ecuación al encontrar los valores de x y sustituirlos en la ecuación te dará el resultado, es decir, cero.

Ecuaciones cuadráticas completas

Cuando las ecuaciones tienen la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y sus coeficientes a, b y c son diferentes de cero se llaman ecuaciones cuadráticas completas. Para resolverlas y encontrar sus soluciones se puede utilizar uno o varios de los siguientes métodos:

- Factorización directa
- Completar el cuadrado
- Por medio de la formula general

El método de solución por factorización es el mismo que se utiliza para resolver las ecuaciones incompletas mixtas, pero aquí la factorización no es por facto común, sino como el producto de dos binomios.

Ejemplo

Si se sabe que al multiplicar la edad de Vanessa por 15 le faltan 100 años para que sea igual al cuadrado de su edad actual, ¿Cuántos años tiene?

Se considera que la edad de Vanessa es x

Se traduce el enunciado al lenguaje algebraico y se tiene:

$$15x + 100 = x^2$$

Se iguala la ecuación a 0:

$$x^2 - 15x - 100 = 0$$

Se factoriza el trinomio del primer miembro:

$$(x - 20)(x + 5) = 0$$

Se utiliza la propiedad del producto cero y se despeja la variable en cada uno de los factores:

$$x - 20 = 0 \qquad x + 5 = 0$$

$$x_1 = 20 \qquad x_2 = -5$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son: $x_1 = 20$ y $x_2 = -5$

Para responder a la pregunta del problema, la solución $x = -5$ no es posible, pues una edad no puede ser negativa. Así la solución correcta es que Vanessa tiene 20 años.

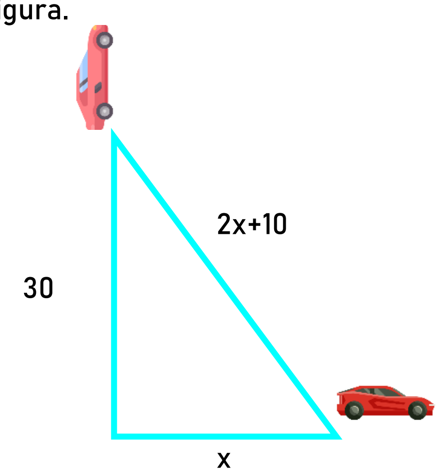
Una ecuación cuadrática completa no siempre puede resolverse por factorización porque no todos los trinomios son factorizables; sin embargo, se puede modificar el termino independiente a partir de los valores *a* y *b* de los términos cuadrático y lineal, respectivamente, para resolver un trinomio cuadrado perfecto.

De este modo se puede obtener las soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo

Dos autos parten de un mismo punto. Uno viaja hacia el norte y el otro hacia el este. Si el auto que se dirige al norte recorre 30 km y la distancia entre los autos es del doble de la recorrida por el que viaja al este más 10 km, ¿Qué distancia hay entre los dos autos?

Como las direcciones en que viajan los autos son perpendiculares, se pueden representar sus recorridos y la distancia entre ellos con un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura.



Es posible calcular la distancia entre estos autos utilizando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 30^2 = (2x + 10)^2$$

Se desarrolla el binomio, se iguala a cero y se reducen termino semejante:

$$x^2 + 30^2 = 4x^2 + 40x + 100$$

$$3x^2 40x - 800 = 0$$

Se obtiene una ecuación de segundo grado que puede ser resuelta con el método de completar el Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP).

Dado que el primer término no tiene raíz cuadrada se divide toda la expresión entre el coeficiente de x^2, en este caso 3, y se simplifica:

$$x^2 + \frac{40}{3}x - \frac{800}{3} = 0$$

Para completar el TCP, el término independiente se pasa al segundo miembro de la ecuación:

$$x^2 + \frac{40}{3}x = \frac{800}{3}$$

Se obtiene la raíz del primer término:

$$\sqrt{x^2} = x$$

Se divide el segundo término entre el doble de la raíz del primero:

$$\frac{\frac{40}{3}x}{2x} = \frac{40x}{6x} = \frac{20}{3}$$

Se suma el cuadrado del término obtenido en el paso anterior en ambos miembros de la ecuación:

$$x^2 + \frac{40}{3}x + \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{800}{3} + \left(\frac{20}{3}\right)^2$$

Para resolver la ecuación resultante primero se factoriza el primer miembro, que corresponde a un TCP, y se simplifica el segundo miembro:

$$\left(x + \frac{20}{3}\right)^2 = \frac{2400}{9} + \frac{400}{9}$$

$$\left(x + \frac{20}{3}\right)^2 = \frac{2800}{9}$$

Finalmente se resuelven las operaciones:

$$x + \frac{20}{3} = \pm\sqrt{\frac{2800}{9}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2800}{9}} - \frac{20}{3}$$

Para obtener las soluciones de la ecuación cuadrática se consideran los dos casos siguientes:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2800}{9}} - \frac{20}{3} = 10.97 \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{2800}{9}} - \frac{20}{3} = -24.30$$

Se observa que se tienen dos soluciones, solamente la primera es válida para la situación planteada, ya que la segunda es negativa. Por lo tanto, el valor de $x = 10.97$ y la distancia entre los dos autos es:

$$2(10.97) + 10 = 31.94\ km$$

Fórmula de solución general

Otra manera de resolver una ecuación cuadrática completa de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ es utilizando la solución de la ecuación cuadrática general, que fue definida a partir de usar el método de completar el cuadrado y que en resumen viene dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El signo ± significa que deben de considerar los dos valores, el positivo y el negativo.

El término $b^2 - 4ac$ se denomina discriminante y se utiliza para verificar lo siguiente:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tendrá dos soluciones diferentes.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tendrá dos soluciones iguales (la misma dos veces).
- Si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tendrá soluciones en los números reales serán dos soluciones diferentes pero en los números complejos.

Con esta fórmula del cálculo de las soluciones de la ecuación cuadrática se transforma de un proceso algebraico a un proceso aritmético. Para utilizarla se hace lo siguiente:

- Primero se identifican los coeficientes *a, b* y *c* de la ecuación que se va a resolver.
- Después se sustituye con ellos en la fórmula general de solución.
- Por último, se utilizan las operaciones aritméticas para obtener las soluciones.

Ejemplo

Resolver la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ utilizando la fórmula general.

Se identifican los valores de a, b y c:

$$a = 1; b = -5\ y\ c = 6$$

Se sustituye con los valores en la fórmula general de solución de las ecuaciones cuadráticas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Para obtener las soluciones se consideran los dos casos siguientes:

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{5 - 1}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación cuadrática son:

$$x_1 = 3 \qquad\qquad x_1 = 2$$

Practicando

Realiza las siguientes consignas:

- Observa las formas de las siguientes ecuaciones y escribe en la línea el tipo de ecuación que representan.
- Después, une con una línea cada forma con las ecuaciones, de la parte posterior, que las ejemplifican.
- Calcula los valores de *x* de las ecuaciones cuadráticas incompletas considerando si son puras o mixtas.

- $ax^2 + c = 0$ ____________________
- $\boldsymbol{ax^2} + \boldsymbol{bx} = 0$ ____________________

- $3x^2 - 12x = 0$
- $x^2 - 25 = 0$

Utiliza la fórmula de solución general para resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

• $3x^2 - 5x + 1 = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	• $x^2 + x + 1 = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver los siguientes ejercicios.

Ecuaciones cuadráticas incompletas

- $3x^2 - 75 = 0$
- $1x^2 + 125x = 0$
- $x^2 - 36 = 0$

Ecuaciones cuadráticas completas

- En tu escuela necesitan una banqueta con un área de 540 m² alrededor de un jardín rectangular que mide 34 × 50 m ¿Cuál es el ancho que se debe tener la banqueta?
- $x^2 + 3x + 2 = 0$

Ecuaciones cuadráticas para aplicar fórmula de solución general

- $x^2 - 4x + 4 = 0$
- $x^2 + 4x = 0$
- $x^2 - 18 = 0$

Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Reconozco cada uno de los elementos de la gráfica de una ecuación de segundo grado.		
Puedo graficar correctamente una ecuación cuadrática.		
Logro diferenciar una ecuación incompleta pura y una ecuación incompleta mixta.		
Puedo resolver ecuaciones de segundo grado incompletas puras.		
Soy capaz de resolver ecuaciones de segundo grado incompletas mixtas.		
Resuelvo ecuaciones cuadráticas completas por cualquiera de los métodos.		
Recuerdo las reglas para resolver las ecuaciones de segundo grado por el método del TCP.		
Soy capaz de solucionar ecuaciones cuadráticas por la formula general.		
Comprendo la función de determinar el discriminante.		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Matemáticas profe Alex. (2018), *Gráfica de la función cuadrática o de segundo grado.* Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=6JQw45YO3Fs
- Súper fácil (2018). *Graficar funciones cuadráticas*. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=gnAdna_tLK0
- GeoGebra (2021), *Resolución gráfica de ecuaciones de segundo grado*. Disponible en https://www.geogebra.org/m/N9TyvDAb
- Resolver (2021) *Ecuaciones cuadráticas puras*. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=njy2HJA_WLM
- TecnoMáticas (2019) *Ecuación cuadrática pura. Ejercicios*. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=XtJSvrLju8Q
- Math2mer (s. f.) *Ecuaciones cuadráticas completas*. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=EbBGlHdt26g
- IngE Darwin (2020) *Ecuaciones de SEGUNDO GRADO - Completas e Incompletas | Introducción y Ejemplos.* Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=q24CrrWdBhI
- Carreón D (s. f.) *Fórmula general súper fácil* Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=Wj4cHg8oHzI
- Matefacil (2015) *¿De dónde sale la fórmula general de segundo grado? (Demostración)*. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=2dZM7BAs6FE

Referencias

- Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor* (2 ed.). México: Patria.
- Barnett, R. (1990). *Álgebra y trigonometría* (3 ed.). México: Mcgraw-Hill.Imágenes tomadas de
- Anzola M., et al. (1981) *Problemas de álgebra*. Madrid.
- Granero F., (1992), *Álgebra y geometría analítica*. McGraw-Hill
- Colegio Nacional de Matemáticas (2009) *Álgebra.* Ed. Pearson
- S. Smith *et al* (2001) *Álgebra, trigonometría y geometría analítica.* Ed. Pearson. México.
- Jiménez R. (2011) *Matemáticas I: álgebra, enfoque por competencias.* 2ª ed. Ed. Pearson. México.
- Swokowski, E. et al. (2001) *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México, Cengage Learning.

Imágenes tomadas de:

- https://www.canva.com/es_mx/
- https://pixabay.com/es/
- https://www.pexels.com/es-es/

Lección 6. Desigualdades

Explorando

Escribe en los recuadros el símbolo de = (igual), < (menor que) o > (mayor que) según corresponda, para comparar el valor resultante en cada par de expresiones algebraicas, considerando que x = -5.

$6x + 2$		$5 - 2x$
$3x + 4$		$7x + 15$
$-x - 8$		$-4x - 23$
$8x + 1$		$9 - 6x$
$-2x - 3$		$-x + 10$

Resuelve la siguiente situación.

Un estudiante ha obtenido las siguientes calificaciones en tres exámenes de un curso en el que se encuentra inscrito: 62, 79 y 85. Si únicamente tiene un examen pendiente ¿Qué calificación debe obtener para que su promedio final sea de 80 o más, sabiendo que la nota máxima es de 100? Argumenta tu respuesta.

Comprendiendo

¿Qué son las desigualdades?

Una **desigualdad**, o también llamada *inecuación*, es un enunciado matemático ya sea númerico o algebracio, que permite establecer una relación de orden para comparar dos cantidades o expresiones algebraicas a partir del uso de los siguientes símbolos:

Símbolo	Significado
$>$	Mayor que
$\geq$	Mayor o igual que
$<$	Menor que
$\leq$	Menor o igual que

Una manera sencilla de interpretar en la práctica esta simbología, es asociando que el símbolo de la desigualdad siempre apunta hacia la expresión de menor valor. Lo cual puedes corroborar con la actividad inicial que realizaste en la sección de **Explorando**, donde sólo era necesario el uso de los símbolos $=$, $<$ o $>$, a partir de realizar la evaluación correspondiente con $x = -5$ en cada par de expresiones algebraicas, y así determinar cuál era mayor o menor, o en su caso, iguales. Por ejemplo, al comparar la primera pareja de expresiones:

$$6x + 2 \ \boxed{\quad}\ 5 - 2x$$

Resulta necesario evaluar la expresión de la derecha:

- $\mathbf{6}(-5) + \mathbf{2} = -30 + 2 = \mathbf{-28}$

Y después la de la izquierda:

- $\mathbf{5} - \mathbf{2}(-5) = 5 + 10 = \mathbf{15}$

De modo que, al comparar ambos valores numéricos, es posible establecer que **-28 es menor que 15**, y, por tanto, la comparación queda como:

$$6x + 2 \ \boxed{<}\ 5 - 2x$$

Por otra parte, de acuerdo con la tabla de simbología que se presentó, se aprecia la introducción de los símbolos $\leq$ (menor o igual que) y $\geq$ (mayor o igual que), los cuales adquieren mayor relevancia al establecer un modelo matemático para resolver una situación problema, como las que serán revisadas más adelante.

La estructura que define una desigualdad consta de un primer miembro, el cual se ubica a la izquierda del símbolo de desigualdad empleado ($<$, $\leq$, $>$ o $\geq$), y de un segundo miembro, ubicado a la derecha del símbolo de desigualdad, tal y como se muestra enseguida:

Símbolo de desigualdad

Primer miembro $\Rightarrow$ $8x + 3 \geq -9$ $\Leftarrow$ Segundo miembro

Para el desarrollo de esta lección, el tipo de situaciones que serán atendidas requerirán del planteamiento y resolución de desigualdades lineales o de primer grado con una variable; y cuyo proceso de solución, es similar al de resolver ecuaciones lineales o de primer grado, el cual requiere de una secuencia ordenada de pasos que conduzcan al despeje de la variable en cuestión.

Asimismo, es necesario puntualizar que deben tomarse en cuenta al menos las siguientes **Propiedades de las desigualdades**:

1. **Una desigualdad no se modifica si a ambos miembros se suma o se resta una misma cantidad.**
- Por ejemplo, si a la siguiente desigualdad le restamos 10 a cada miembro, esta se mantiene:

$$2x - 1 < 4$$
$$2x - 1 - \mathbf{10} < 4 - \mathbf{10}$$
$$2x - 11 < -6$$

2. **Una desigualdad no se modifica si ambos miembros son multiplicados o divididos por una misma cantidad positiva.**
- Si en la siguiente desigualdad, se multiplica por 3 a cada miembro, también se mantiene:

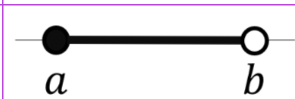
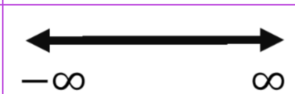
$$2x - 1 < 4$$
$$\mathbf{3}(2x - 1) < \mathbf{3}(4)$$
$$6x - 3 < 12$$

3. **Si ambos miembros de una desigualdad son multiplicados o divididos por una misma cantidad negativa, entonces el sentido de la desigualdad se invierte.**
- En caso de que en la siguiente desigualdad se multiplique por -7 a cada miembro, el símbolo de la desigualdad cambia de sentido:

$$2x - 1 < 4$$
$$-\mathbf{7}(2x - 1) > -\mathbf{7}(4)$$
$$-14x + 7 > -28$$

Sin embargo, antes de comenzar con la resolución de situaciones, se debe recordar que una desigualdad no presenta una solución única, sino que existe un conjunto de valores que satisfacen a la desigualdad inicial, y al cual nos referiremos como **conjunto solución**, el cual se puede denotar como intervalo o de forma gráfica en la recta numérica de los reales.

La siguiente tabla muestra claramente cómo representar la solución de una desigualdad, de acuerdo con el símbolo en uso, ya sea como intervalo o en su forma gráfica:

Desigualdad	Intervalo	Gráfica
$x > a$	(a, ∞) Intervalo infinito abierto por la izquierda	
$x < a$	$(-\infty, a)$ Intervalo infinito abierto por la derecha	
$x \geq a$	$[a, \infty)$ Intervalo infinito cerrado por la izquierda	
$x \leq a$	$(-\infty, a]$ Intervalo infinito cerrado por la derecha	
$a < x < b$	(a, b) Intervalo abierto	
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$ Intervalo cerrado	
$a < x \leq b$	$(a, b]$ Intervalo semiabierto	
$a \leq x < b$	$[a, b)$ Intervalo semicerrado	
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$ Intervalo infinito abierto completamente	

Como complemento de la tabla, nota que para cuando se emplean los símbolos de $<$ y $>$, el intervalo que se determina se caracteriza por el uso de paréntesis en su notación, y los valores extremos (aquellos que se encuentran a lado de los paréntesis) no pertenecen a la solución de la desigualdad. Y en la representación gráfica de la solución, al valor extremo se le escribe un círculo abierto (sin rellenar).

Mientras que, para cuando se emplean los símbolos de $\leq$ y $\geq$, el intervalo se caracteriza por el uso de corchetes en su notación, y los valores extremos (los que se encuentran a lado de los corchetes) sí pertenecen al conjunto solución de la desigualdad; y a diferencia de los anteriores, en la representación gráfica, al valor extremo se le escribe un círculo cerrado (relleno).

Para cuando un intervalo requiera incluir en uno de sus extremos a infinito ∞, ya sea positivo o negativo, éste deberá llevar paréntesis y en la representación gráfica, una flecha.

Sin más preámbulo al respecto, revisemos a continuación como resolver una situación problema a partir del empleo de desigualdades, para lo cual retomaremos la situación problema que se presentó al inicio de la lección:

Un estudiante ha obtenido las siguientes calificaciones en tres exámenes de un curso en el que se encuentra inscrito: 62, 79 y 85. Si únicamente tiene un examen pendiente, ¿qué calificación debe obtener para que su promedio final sea de 80 o más, sabiendo que la nota máxima es de 100?

Para ello, conviene establecer un plan de solución que implique:

- ***a)*** *Entender el problema*
- ***b)*** *Establecer una desigualdad y resolverla*
- ***c)*** *Interpretar la respuesta y verificar*

De manera que atender esta situación y cualquier otra, facilite su resolución.

a) *Entender el problema*

✓ **¿Qué trato de encontrar?**

- La calificación que debe obtener el estudiante en el examen pendiente

✓ **¿Qué datos tengo?**

- Las calificaciones de los primeros 3 exámenes son: 62, 79 y 85
- Se desea que el promedio final sea igual o mayor a 80
- La nota máxima es 100 (no puede tener una nota mayor a este puntaje)

✓ **¿Qué desconozco?**

- La calificación del último examen

b) *Establecer una desigualdad y resolverla*

✓ **Elijo una variable para expresar los datos desconocidos**

- La calificación del examen pendiente: x

✓ **Expreso algebraicamente la relación entre los datos conocidos y desconocidos**

- El promedio de las 4 calificaciones se expresa como:

$$\frac{62 + 79 + 85 + x}{4}$$

- El promedio debe ser igual o mayor a 80, por lo tanto:

$$\frac{62 + 79 + 85 + x}{4} \geq 80$$

✓ **Resuelvo la desigualdad**

- Para ello, consideremos que el objetivo es despejar la variable en cuestión, que el proceso es similar al de resolver una ecuación lineal, y que estaremos considerando las propiedades de las desigualdades que se revisaron previamente, por tanto, partimos de que:

$$\frac{62 + 79 + 85 + x}{4} \geq 80$$

- Reducimos términos en el primer miembro:

$$\frac{226 + x}{4} \geq 80$$

- Multiplicamos ambos miembros por 4 y reducimos:

$$\mathbf{4}\left(\frac{226 + x}{4}\right) \geq \mathbf{4}(80)$$

$$226 + x \geq 320$$

- Restamos 226 en ambos miembros y reducimos:

$$226 + x \; - \mathbf{226} \geq 320 - \mathbf{226}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{94}$$

Concluyendo así con la desigualdad.

c) *Interpretar la respuesta y verificar* 

- Tomando en cuenta que la variable x representa la calificación del examen pendiente, se deduce que el estudiante requiere una nota igual o mayor a 94 si desea que su promedio final sea de 80 o más.

- Considerando que la nota máxima que se puede obtener es de 100, entonces se determina que el intervalo solución a esta situación corresponde al intervalo cerrado: $[94\,, 100]$ el cual nos dice que debe obtener como mínimo un 94 y como máximo un 100.

- Aunque no es requisito de la situación, la representación gráfica sobre la recta numérica quedaría como:

- A modo de verificación, si consideramos que la nota mínima es de 94, entonces el promedio se determina por:

$$\frac{62 + 79 + 85 + 94}{4} = \frac{320}{4} = 80$$

Cumpliendo absolutamente con la condición del problema, lo que nos lleva a considerar también, que entonces si se obtiene una nota por encima de 94, el promedio será superior a 80 y se continúa satisfaciendo con la desigualdad.

Revisemos ahora, una situación nueva:

- Don Alonso prometió llevar a sus nietos Lucía y Lorenzo a un parque de diversiones, con la condición de que entre ambos ahorren $1,300 o más. ¿Cuánto deberá ahorrar al menos cada uno, si Lucía se comprometió a ahorrar el doble de lo que ahorre su primo Lorenzo más $70?

Retomando el plan de solución implementado en el ejemplo anterior, se tiene entonces:

a) *Entender el problema*

✓ **¿Qué trato de encontrar?**

- La cantidad de dinero que deben ahorrar Lucía y Lorenzo

✓ **¿Qué datos tengo?**

- Entre los dos deben ahorrar al menos $1,300
- Lucía ahorrará el doble de lo que ahorre Lorenzo más $70

✓ **¿Qué desconozco?**

- La cantidad de dinero que debe ahorrar Lorenzo
- La cantidad de dinero que debe ahorrar Lucía

b) *Establecer una desigualdad y resolverla*

✓ **Elijo una variable para expresar los datos desconocidos**

- El dinero que debe ahorrar Lorenzo: x
- El dinero que debe ahorrar Lucía, considerando que debe ser el doble que lo de Lorenzo más $70: $2x + 70$

✓ **Expreso algebraicamente la relación entre los datos conocidos y desconocidos**

- El ahorro que deben realizar ambos nietos se expresa como: $x + 2x + 70$

- Como entre los dos deben ahorrar $1,300 o más, por lo tanto:

$$x + 2x + 70 \geq 1{,}300$$

✓ Resuelvo la desigualdad

- Como el objetivo es despejar la variable en cuestión y que se deben considerar las propiedades de las desigualdades, se parte entonces de:

$$x + 2x + 70 \geq 1{,}300$$

- Reducimos términos en el primer miembro:

$$3x + 70 \geq 1{,}300$$

- Restamos 70 en ambos miembros y reducimos:

$$3x + 70 - 70 \geq 1{,}300 - 70$$

$$3x \geq 1{,}230$$

- Dividimos ambos miembros por 3 y reducimos:

$$\frac{3x}{\mathbf{3}} \geq \frac{1{,}230}{\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{x \geq 410}$$

Concluyendo así con la desigualdad.

c)* *Interpretar la respuesta y verificar 

- Tomando en cuenta que la variable x representa el dinero que debe ahorrar Lorenzo, se deduce entonces que él debe ahorrar por lo menos $410.

- Con base en lo anterior, y como Lucía se comprometió a ahorrar el doble de lo ahorrado por Lorenzo más $70, entonces la cantidad mínima que ella debe ahorrar queda determinada por:

2($410) + $70 = $890

- Considerando que el ahorro de ambos estará en función de lo que ahorre Lorenzo, entonces se tiene que el intervalo solución al problema corresponde al intervalo infinito cerrado por la izquierda $[410\,,\infty)$

- Si se desea representar el intervalo solución en su forma gráfica sobre la recta numérica, éste quedaría como:

- A modo de verificación, si consideramos que la cantidad mínima a ahorrar por Lorenzo es de $410, entonces la situación del ahorro queda determinada por:

410 + 2(410) + 70 = 410 + 820 + 70 = 1,300

Satisfaciendo con la condición del problema, lo que nos lleva a considerar también, que entonces si Lorenzo ahorra más de \$410, consecuentemente Lucía ahorrará el doble más \$70, y con ello se estará sobrepasando los \$1,300 que como mínimo, su abuelo les pidió que ahorraran para que los llevara al parque de diversiones.

Practicando

Resuelve las siguientes desigualdades y elije el intervalo solución que responde correctamente cada situación.

1. $\frac{8-2x}{5} \leq 2(4x-1)$

a) $\left[\frac{3}{7}\ ,\ \infty\right)$ b) $\left(-\infty\ ,\ \frac{3}{7}\right]$ c) $\left[-\frac{3}{7}\ ,\ \infty\right)$

Considera para este ejercicio:

- Efectuar la multiplicación para prescindir de los paréntesis
- Despejar la variable x, aplicando las propiedades de las desigualdades
- A partir de la solución, plantear el intervalo solución

2. $-2 \leq \frac{4-x}{9} < 1$

a) $(-5\,,22]$ b) $[-22\,,5)$ c) $[-5\,,22)$

Considera para este ejercicio:

- El objetivo es despejar la variable x, la cual se encuentra al centro de la desigualdad.
- Al aplicar las propiedades de las desigualdades, las operaciones a realizar deben aplicarse en las tres partes de la desigualdad: la izquierda, el centro y la derecha.
- Al tener despejada la variable, plantea el intervalo solución.

Soluciona la siguiente situación a partir del planteamiento y resolución de desigualdades, apóyate de la tabla como guía para encontrar las soluciones:

- En vuelos nacionales de cierta aerolínea, los pasajeros pueden documentar equipaje con un peso acumulado de hasta 25 kg. Si una persona lleva dos maletas y una de ellas es 6 kg más pesada que la otra. ¿Cuál es el mayor peso que puede tener la maleta más liviana?

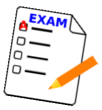
Guía para el desarrollo	Desarrollo
¿Qué trato de encontrar?	
¿Qué información tengo?	

¿Qué desconozco?	
Elije una variable para expresar los datos desconocidos.	
Expresa algebraicamente la relación entre los datos conocidos y desconocidos, utilizando el símbolo de desigualdad pertinente.	
Despeja la variable, utilizando las propiedades de las desigualdades.	
Interpreta tu resultado, ¿qué significa el valor encontrado para la variable en cuestión?	
Expresa la conclusión de la situación planteada.	

Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver los siguientes ejercicios.

- Un estudiante se ha propuesto obtener como promedio final una nota entre 8.5 y 9.5. Si las calificaciones que obtuvo en 4 asignaturas de las 5 que cursa son: 9.6, 7.0, 8.1 y 9.5. ¿Cuál es la calificación mínima que debe obtener el estudiante en la quinta asignatura para cumplir con su objetivo?



- Se tienen $480 para comprar dos tipos de uva. Si la uva verde tiene un precio de $120 el kg, mientras que el precio por kg de uva roja es de $90. ¿Cuántos kg como máximo hay que comprar de uva verde para no exceder el presupuesto, si se impone la condición de que la cantidad a comprar de uva roja sea el doble que la cantidad a comprar de uva verde?

Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Entiendo qué es una desigualdad o inecuación lineal con una variable.		
Comprendo las propiedades de desigualdades y su relevancia al momento de resolver una desigualdad lineal.		
Comprendo la notación de intervalo para representar el conjunto solución de una desigualdad lineal.		
Comprendo la representación gráfica en la recta numérica, del conjunto solución de una desigualdad lineal.		
Identifico los datos y variables que intervienen en una situación problémica que se resuelve por medio de desigualdades lineales con una variable.		
Puedo plantear y resolver la desigualdad lineal con una variable que permite resolver una situación problema.		
Soy capaz de expresar el conjunto solución de una desigualdad lineal con una variable, mediante un intervalo y en su forma gráfica.		
En el caso de que hayas respondido “Tengo dudas” en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Soluciones Problemas. Inecuaciones de primer grado. Disponible en: https://solucionesproblemas.com/inecuaciones-de-primer-grado/
- Matemóvil, Inecuaciones de primer grado, ejercicios resueltos. Disponible en: https://youtu.be/aAsD-aPY-YM
- Profe AlexZ, Problema inecuaciones. Disponible en https://youtu.be/OrfyGBriR6M
- Umáximo, Problemas de inecuaciones lineales con racionales. Disponible en https://youtu.be/K0mARrXjM2o

Referencias

- Cano, P. (2014). *Asómate a las matemáticas aplicadas*. México: Editorial Progreso.
- Cuéllar, J. (2010). *Álgebra*. Segunda Ed. México: McGraw Hill Educación.
- Garza, B. (2014). *Álgebra*. México: Pearson.
- Kaufmann, J. & Schwitters, K. (2013). *Álgebra*. 8° Ed. México: Cengage Learning.

Imágenes tomadas de:

- https://www.klipartz.com/
- www.canva.com

Lección 7. Resolución de triángulos rectángulos

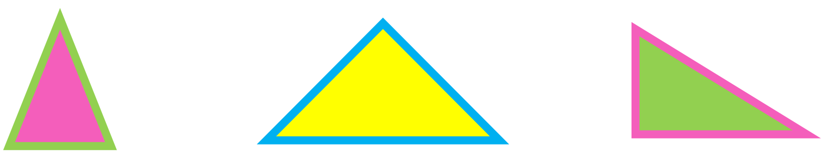
Explorando

Selecciona la respuesta correcta.

1. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto:

   a) Menor a 90°
   b) Igual a 90°
   c) Mayor a 90°

2. De los siguientes triángulos ¿cuál pertenece a un triángulo rectángulo?



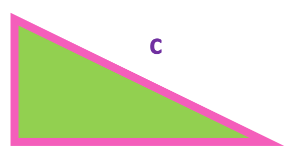
a) b) c)

3. En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a:

   a) La suma de los cuadrados de los catetos.
   b) La diferencia de los catetos.
   c) El producto de los cuadrados de los catetos.

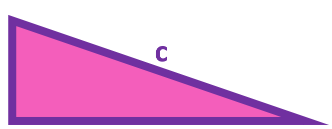
4. Del siguiente triángulo la hipotenusa está representada por la letra:

   a) a
   b) b
   c) c



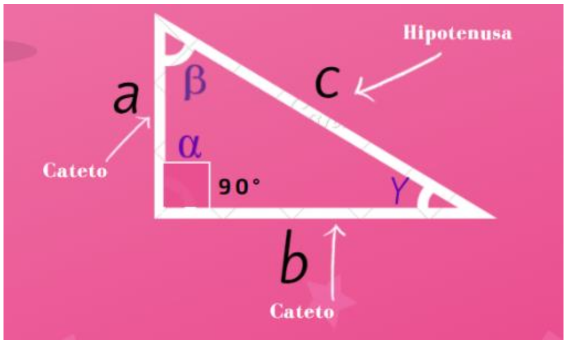
5. Del siguiente triángulo los catetos están representados por las letras:

   a) a y c
   b) b y c
   c) a y b



Comprendiendo

Resolución de triángulos rectángulos

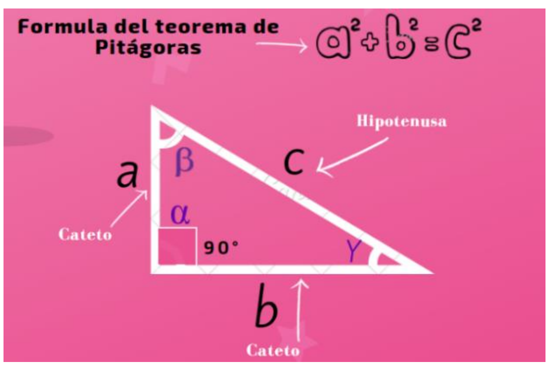


Los triángulos, están formados por 3 lados y 3 ángulos. Asimismo, los triángulos rectángulos se llaman así por tener un ángulo recto (90°) entre sus catetos.

Los lados y ángulos del triángulo rectángulo tienen una serie de **relaciones** entre ellos, las cuales nos van a ayudar a calcular las medidas de los elementos que no conozcamos.

Teorema de Pitágoras

La resolución de triángulos rectángulos, cuando se conocen dos lados es mediante el **Teorema de Pitágoras,** que establece que **el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.**



Para obtener la hipotenusa es necesario despejar c de la siguiente manera:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

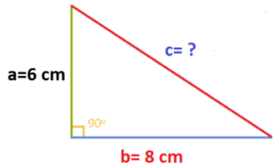
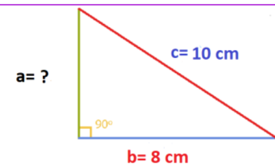
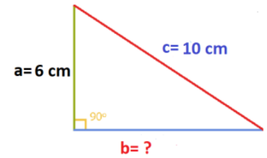
De dicho teorema se puede afirmar que:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual a la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y del otro cateto.

Para obtener la medida de los catetos es necesario despejar a o b según sea el caso.

Despeje de "a"	**Despeje de " b"**
$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
$a^2 + b^2 = c^2$	$a^2 + b^2 = c^2$
$a^2 = c^2 - b^2$	$b^2 = c^2 - a^2$
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Ejemplos:

		
$c^2 = a^2 + b^2$	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $c = \sqrt{6^2 + 8^2}$ $c = \sqrt{36 +}$ $c = \sqrt{100}$ c= 10 cm	$a = \sqrt{10^2 -}$ $a = \sqrt{100 -}$ $a = \sqrt{36}$ a= 6 cm	$b = \sqrt{10^2 -}$ $b = \sqrt{100 -}$ $b = \sqrt{64}$ b= 8 cm

Razones trigonométricas

Se establecen entre dos lados de un triángulo rectángulo en relación con cada uno de sus ángulos agudos (miden menos de 90°). También se les conoce como funciones trigonométricas.

Son seis y se pueden establecer para cualquiera de los dos ángulos agudos en un triángulo rectángulo, tres son **fundamentales** y tres son **recíprocas.** Están dadas por los catetos y la hipotenusa, mismas que se utilizan en la resolución de triángulos rectángulos, apoyadas por el *Teorema de Pitágoras.*

Las razones trigonométricas podemos utilizarlas **cuando conozcamos un lado y un ángulo** y nos pidan calcular cualquier otro lado o ángulo.

Funciones trigonométricas

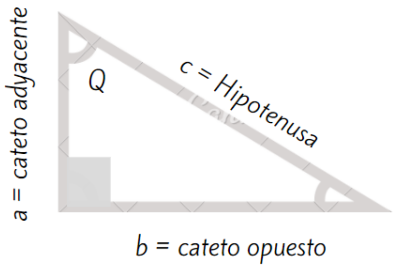
FUNDAMENTALES

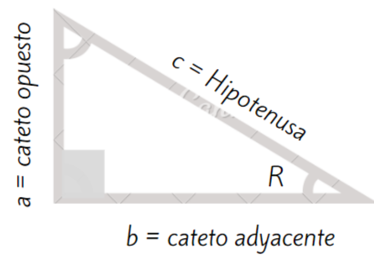
sen = seno
cos = coseno
tan (tg) = tangente

RECÍPROCAS

sen = seno
cos = coseno
tan (tg) = tangente

Se representan de la siguiente manera:





Ángulo Q

$$\text{sen } Q = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos Q = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan Q = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\cot Q = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\sec Q = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\csc Q = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

Ángulo R:

$$\text{sen } R = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos R = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan R = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

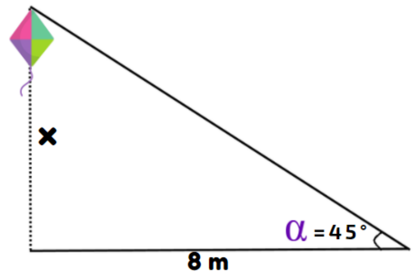
$$\cot R = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\sec R = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\csc R = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

Ejemplo:

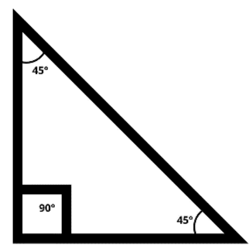
María está volando su cometa y le gustaría saber qué altura alcanza. La sombra de la cometa comienza a sus pies y termina a 8 metros. El ángulo que forma el cable con el suelo es de 45°. ¿A qué altura se encuentra la cometa?



Dado que el dato a localizar es el cateto opuesto del ángulo α, la función trigonométrica que se utiliza es la tangente o cotangente porque se cuenta con el valor del cateto adyacente y el valor del ángulo α.

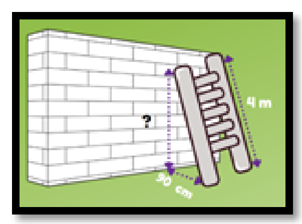
Identificación de datos	Operaciones	Resultado
α =45° Cateto adyacente = 8 m x = ? x “representa al cateto opuesto”	$\tan \propto = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$ $\tan 45° = \frac{x}{8}$ $x = (8)(tan45°)$ $x = (8)(1)$ $x = 8m$	La altura a la que se encuentra la cometa es aproximadamente, 8 m.

Recuerda que los tres ángulos de un triángulo rectángulo suman entre ellos 180°.



Practicando

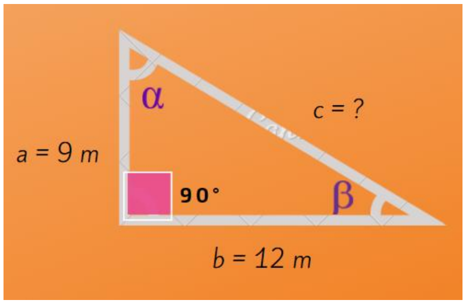
Resuelve los siguientes ejercicios



1. Calcula la altura que podemos alcanzar con una escalera de 4 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 90 centímetros de ésta.

Identificación de datos	Operaciones	Resultado
a= $\sqrt{c^2 - b^2}$ c= b=		

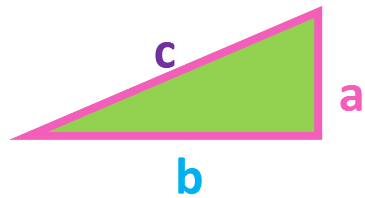
2. Del siguiente triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos: uno mide 9 m y el otro mide 12m. Calcula la hipotenusa y los ángulos α y β.



Apoyo: Una vez identificado el valor de la hipotenusa se puede utilizar cualquier funcion trigonometrica para encontrar los angulos solicitados, ya que se conocerá el valor de los tres lados del triangulo rectangulo, para este ejercicio se propone utilizar la funcion de seno.

Identificación de datos	Operaciones	Resultado
$c^2 = a^2 + b^2$ **c=** $\sqrt{a^2 + b^2}$ **a=** **b=** **sen β**= a/c Despejando la formula queda: **β=sen^{-1} (a/c)** **sen α = b/c** Despejando la formula queda: **α =sen^{-1} (b/c)**		

3. Utiliza la siguiente figura para determinar el cateto que se pide en cada inciso:

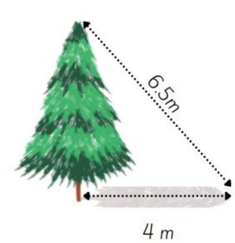


1) a=24, c=25	2) b=6, c=8	3) a= $\sqrt{16}$, c=8
Resultado:_______________	**Resultado:_______________**	**Resultado:_______________**

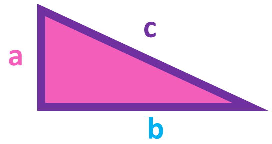
Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver los siguientes ejercicios.

1. Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 4 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 6.5 metros, ¿cuál es la altura del árbol?



2. Halla el valor de la hipotenusa del triángulo que se muestra, según los datos proporcionados en cada uno de los incisos.

Formula del Teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$		
1) a = 12, b = 9	**2) a = 3, b = 6**	**3) a = 3, b = 7**
		

Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Reconozco un triángulo rectángulo.		
Identifico los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo.		
Soy capaz de diferenciar entre un cateto opuesto y uno adyacente.		
Resuelvo problemas de triángulos rectángulos con razones trigonométricas.		
Soy capaz de aplicar el teorema de Pitágoras en situaciones de la vida cotidiana.		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Razones Trigonométricas en el Triángulo Rectángulo Ejercicios Resueltos Nivel 1. (2015, 12 octubre). YouTube. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=rj0kkRM-JsM (consultado el 30 de septiembre de 2021).
- TEOREMA DE PITAGORAS Súper Fácil - Para principiantes. (2020, 13 julio). YouTube. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=eTEBvBlz8Ok (consultado el 27 de septiembre de 2021).

Referencias

- Calculo.cc (s.f.). Ejercicios resueltos de razones trigonométricas de un ángulo agudo. Ejemplos resueltos. https://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/trigonometria/problemas/p_razones.html (Consultado el 30 de septiembre de 2021).
- Strathern, P. (s. f.). Pitágoras y su teorema. Google Books. https://books.google.com.mx/books?id=MDK9AwAAQBAJ&printsec=frontcover&dq=teorema+de+pitagoras+libros&hl=es-419&sa=X&ved=2ahUKEwic5YG-g57zAhVQu54KHa0CChAQ6AF6BAgKEAI#v=onepage&q&f=false (Consultado el 27 de septiembre de 2021,)

Imágenes tomadas de:

- https://canva.com/

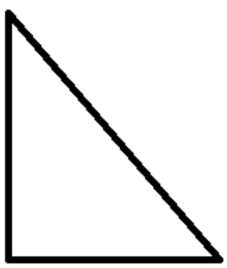
Lección 8.Resolución de triángulos no rectángulos

Explorando

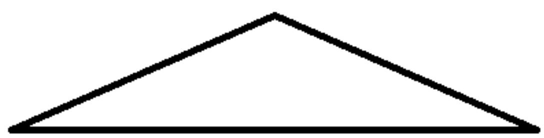
Relaciona los conceptos según correspondan.

Son triángulos que tienen al menos un ángulo recto dentro de sus ángulos internos.	○	180 grados
Se definen como triángulos oblicuángulos cuando.	○	Triángulos rectángulos

Observa los siguientes triángulos, identifica las diferencias y escríbelas.



(1)



(2)

Comprendiendo

El triángulo oblicuo

De acuerdo con lo que aprendiste en la lección anterior un triángulo rectángulo se caracteriza por tener un ángulo de 90 grados que le da ciertas características y propiedades. Gracias a las propiedades de un triángulo rectángulo es muy fácil encontrar los valores de sus lados, ya sea usando el Teorema de Pitágoras o aprovechando sus ángulos a través de la relación de sus lados, para ello se emplean las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, de esta forma se pueden encontrar lados o ángulos faltantes.

En esta lección aprenderás acerca de los triángulos oblicuos. Un triángulo no rectángulo es un triángulo conocido como *oblicuángulo* y es aquel en cuyos ángulos internos **no** hay ángulos que midan **90 grados**.

En el caso de un triángulo oblicuángulo debes utilizar la Ley de senos y la Ley de cosenos.

Ley de senos

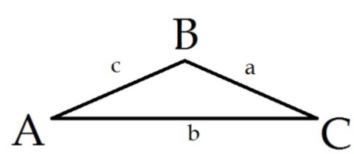
$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$$

Ley de cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



Ambas leyes aplicadas a un triángulo oblicuángulo.

Si en los triángulos oblicuángulos, los ángulos internos son agudos, es decir menores de 90 grados, se denominarán **triángulos oblicuángulos acutángulos** ; pero si tienen entre sus ángulos uno que sea mayor de 90 pero menor a 180 grados se les llamará **triángulo oblicuángulo obtusángulo**, y en cuyo caso se hace el siguiente ajuste a las leyes:

sen ϴ = sen (180 – ϴ) y **cos ϴ= -cos (180 - ϴ)**

Por ejemplo si ϴ= 120° tenemos que:

sen 120° = sen (180° - 120°)= sen 60° = 0.8660

cos 120° = - cos (180° - 120°) = - cos 60° = - 0.5000

Ejemplo de problema

En las orillas opuestas de un río se sitúan dos puntos A y B. En la orilla donde está situado el punto A, se determina un segmento de recta AC= 275 m y se miden los ángulos CAB= 125°40' y ACB = 48° 50'. Encontrar la longitud de AB.

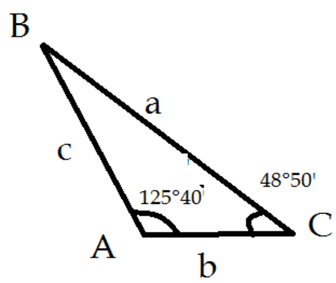
Recuerda que la suma interna de los ángulos de cualquier triángulo es 180°

Para poder ir comprendiendo como vamos a resolver el triángulo en cuestión, aplicaremos esta regla de la suma de los tres ángulos internos del triángulo ABC, por lo tanto, se plantea lo siguiente:

ángulo A + ángulo B + ángulo C = 180°

Despejando el ángulo B

ángulo B = 180° - ángulo C – ángulo A o también podemos representarlo de la siguiente manera solo colocando el ángulo **B = 180° - C – A = 180° - (C + A)**, pues solo aplicamos una propiedad asociativa.



B = 180° - (C+A)

= 180° - (48°50' +125°40')

= 180° - (173°90')

= 180° - 174°30'

= 179°60' – 174°30'

= 5° 30'

Entonces:

AB = C = $\frac{b\ sen\ C}{sen\ B} = \frac{275\ m * sen\ (48°50')}{sen\ (\ 5°\ 30')} = \frac{275\ m * 0.7528}{0.0958} = \boldsymbol{2160\ m}$

Siendo **2160 m** la distancia buscada.

Recuerda que:

- La suma interna de los ángulos de cualquier triángulo es 180°.
- Las funciones trigonométricas son seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.
- Los triángulos tienen muchas aplicaciones en la vida práctica a partir de sus propiedades.

Practicando

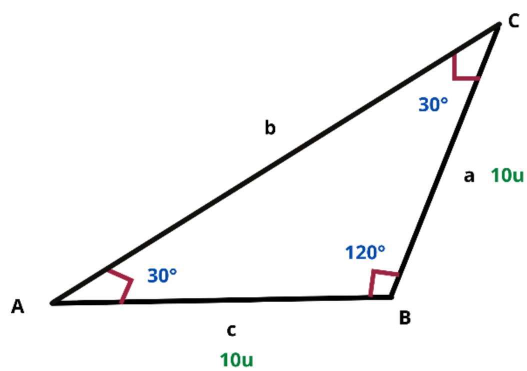
Completa los datos de la tabla y realiza el procedimiento necesario para encontrar el valor del lado b.

Recuerda que para encontrar el lado b necesitas tomar dos de las relaciones de la ley de senos.

Lado a=	
Lado b=	
Lado c=	

Ángulo A=	
Ángulo B=	
Ángulo C=	

Utiliza la ley de cosenos $\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$



Encuentra los valores de los datos que faltan utilizando la ley de senos $\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$

Recuerda que el valor de C es calculado a partir de la suma interna de los ángulos de un triángulo que da como resultado 180°, entonces, ángulo C = 108° – (ángulo A + ángulo B).

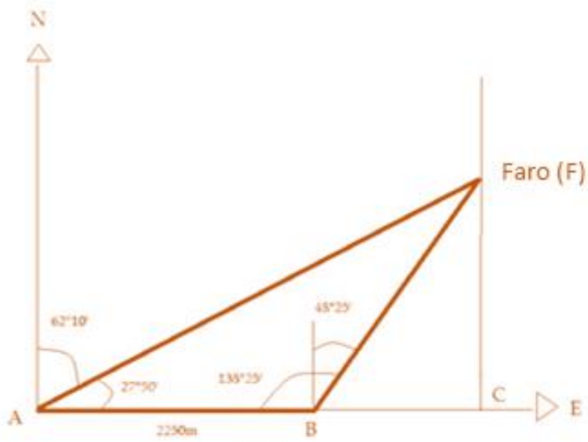
Lado a=	
Lado b=	
Lado c=	50 cm

Ángulo A=	15°
Ángulo B=	65°
Ángulo C=	

Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver el siguiente ejercicio.

Un barco que navega directamente hacia el Este. Se observa un faro con una orientación N 62°10’ E, cuándo el barco ha recorrido 2250m, la orientación del faro es N 48°25’ E. Si el barco continúa navegando sin alterar su rumbo, ¿Cuál será la menor distancia a la que pasará del faro?



Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Reconozco las diferencias entre los triángulos rectángulo y los triángulos oblicuos.		
Puedo distinguir las fórmulas propias de los triángulos oblicuos para la solución de sus elementos.		
Entiendo las aplicaciones de la solución de triángulos no rectángulos en la vida cotidiana a partir de la relación de sus lados y sus ángulos.		
Comprendo que puedo utilizar las propiedades de los triángulos, como el manejo de la suma de ángulos internos de un triángulo o la aplicación de la ley de senos o cosenos para hallar los elementos faltantes ya sean lados o ángulos para resolver problemas trigonométricos.		
En el caso de que hayas respondido “Tengo dudas” en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Ley de Seno y Coseno, Ejemplo 1. Solucionar el triángulo. Disponible en:
- https://www.youtube.com/watch?v=SbFetGnLdr8
- Resolución de triángulos oblicuángulos utilizando la Ley de Senos. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=8_-ktd9QKKI
- Ley de Cosenos, Resolución de Triángulos Oblicuángulos (Encontrar 3 ángulos). Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=SfUldTXOL9s

Referencias

- Swokowski, E. (1985) Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.
- Garza, B. (2000). Geometría y Trigonometría, primera edición. Cuarta reimpresión. Editorial DGETI.
- Ayres, F. (1982), Trigonometría Plana y Esférica, Primera Edición, Editorial Mc Graw Hill.

Lección 9. La recta

Explorando

Realiza lo que se indica y contesta las preguntas.

1. Localiza las siguientes coordenadas:

a) Iglesia (,)
b) Tienda (,)
c) Escuela (,)
d) Parque (,)
e) Renta de bicicletas (,)

2. Traza rectas uniendo los siguientes puntos en el plano cartesiano:

a) Del punto tienda al punto parque.

b) Del punto Iglesia al punto renta de bicicletas.

c) Del punto tienda al punto escuela.

3. ¿Cuál es la pendiente que hay de la línea recta que une los puntos tienda y parque?

a) 1 b) $\frac{1}{6}$ c) -6 d) $-\frac{1}{6}$

4. Calcula la pendiente de la recta que une los puntos iglesia y renta de bicicleta.

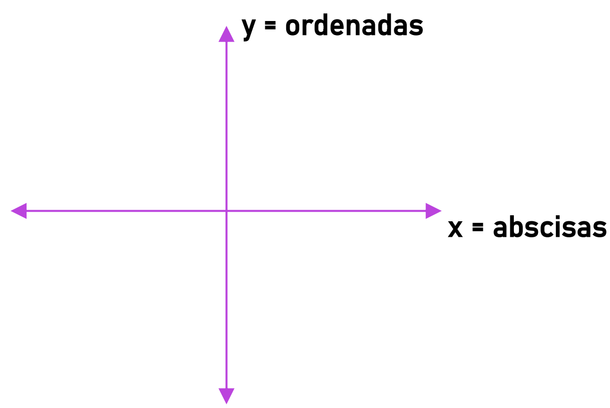
a) 1 b) $\frac{1}{6}$ c) -6 d) $-\frac{1}{6}$

5. Señala los elementos necesarios para determinar la ecuación de una recta.

a) Pendiente b) Punto c) Plano d) Ordenada en el origen

Comprendiendo

La **línea recta** es un lugar geométrico determinado por un conjunto de puntos infinitos, donde a cada uno de ellos les corresponde un par de coordenadas (la abscisa y la ordenada).



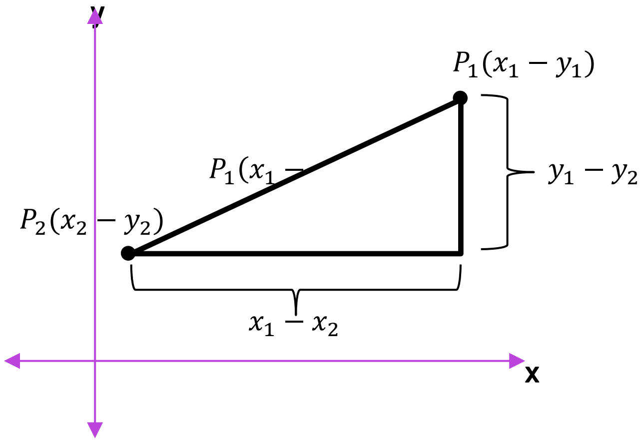
Cualquier punto de una recta y sus respectivas coordenadas se simbolizan de la siguiente manera:

P (x, y)

Como ya sabemos, si se toman 2 puntos cualesquiera de una recta se obtendrá siempre la misma pendiente.

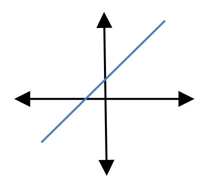
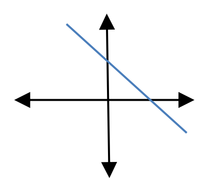
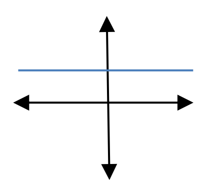
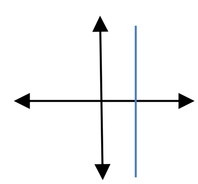
Pendiente y ángulo de inclinación

La **pendiente de una recta** está determinada por el cambio en la distancia vertical $(y_2 - y_1)$ dividida entre el cambio en la distancia horizontal $(x_2 - x_1)$, la cual se representa con la siguiente fórmula:



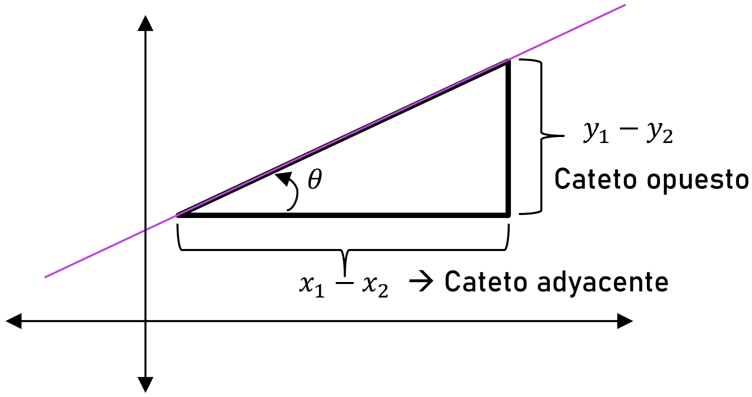
$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ donde $P_2(x_2 - y_2)$

Tipos de pendiente

Pendiente de la recta	Ángulo de inclinación	Tipo de recta	Ejemplo
Positiva	$0^\circ < \theta < 90^\circ$ (Agudo)	Creciente	
Negativa	$90^\circ < \theta < 180^\circ$ (Obtuso)	Decreciente	
Cero	$\theta = 0^\circ$ o bien $\theta = 180^\circ$	Horizontal	
Indefinida	$\theta = 90^\circ$	Vertical	

La inclinación de una recta es el ángulo que se forma entre la recta y el eje “x”, este se mide en sentido contrario de las manecillas del reloj.

Como $m = tang\ \theta$



Entonces en el triángulo: $m = tang\ \theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ejemplos

De acuerdo con el “croquis de mi ciudad”, se desea encontrar la pendiente y ángulo de inclinación entre los puntos: Oxxo (A) y Plaza (B).

Datos:

A (-1 , 1)   B (7, -2)

x_1, y_1 x_2, y_2

Para obtener la pendiente

Fórmula: $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$

Sustituimos $m = \frac{((-2)-(1))}{((7)-(-1))}$

Aplicamos leyes de los signos $m = \frac{(-2 - 1)}{(7+1)}$

Simplificamos $m = \frac{-3}{8}$ **Pendiente**

Para obtener el ángulo de inclinación

Fórmula: $tang\ \theta = m$

Sustituimos $tang\ \theta = \frac{-3}{8}$

Despejando θ $\theta = tang^{-1}\left(\frac{-3}{8}\right)$

Aplicando la función tangente inversa $\theta = -20.55°$

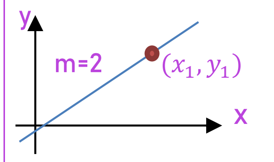
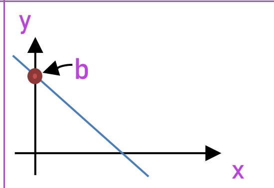
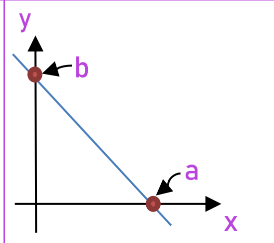
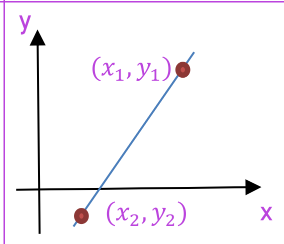
Como $\theta < 0$, entonces $\theta = 180° - 22.55°$

se resta el valor encontrado $\theta = 159°26´28´´$

a 180°

Ecuaciones de la recta

La ecuación de una línea recta se puede expresar de diversas formas, a continuación, se muestra un diagrama con el nombre de la ecuación, la fórmula, datos necesarios para obtener la ecuación y gráfica.

Nombre	Fórmula	Se necesita	Gráfica
Punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$	$m =$ pendiente $(x_1 - y_1) =$ coordenadas de un punto	
Pendiente-ordenada en el origen	$y = mx + b$	$m =$ pendiente $b =$ ordenada en el origen (intersección de la recta con el eje "y"	
Simétrica	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$a =$ intersección de la recta con el eje "x" $b =$ ordenada en el origen (intersección de la recta con el eje "y"	
Cartesiana	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$(x_1 - y_1) =$ coordenadas punto 1 $(x_2 - y_2) =$ coordenadas punto 2	

La fórmula general de la recta $Ax + By + C = 0$, se exprese y desarrolla de la siguiente manera:

$$Ax + By + C = 0$$

con $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$

queda $Ax + By + C = 0$

Despejando *y*, tenemos:

$$By = -Ax - C$$

$$y = \frac{-Ax-C}{B}$$

$y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$ Esta ecuación corresponde a la forma $y = mx + b$, en donde la pendiente es $m = -\frac{A}{B}$ y la intersección con el eje "y" es $b = -\frac{C}{B}$.

Por lo tanto, podemos decir que la forma general de la recta la podemos representar en otras formas de ecuación y a su vez de cualquier forma de ecuación a forma general.

Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (3,4) y su pendiente es $\frac{2}{3}$ y traza la recta que le corresponde.

Solución

Datos Punto A (3,4), pendiente $m = \frac{2}{3}$

Fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$

Sustituimos A (3,4), donde $x_1 = 3$ y $y_1 = 4$ y pendiente $m = \frac{2}{3}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 3)$$

Multiplicamos por 3 ambos miembros $3(\, y - 4) = \frac{2}{3}(x - 3)(3)$

Se dividen los números 3 $3(y - 4) = \frac{2}{\cancel{3}}(x - 3)(\cancel{3})$

en el miembro derecho $3(y - 4) = 2(x - 3)$

Se aplica propiedad distributiva $3y - 12 = 2x - 6$

en ambos miembros

Igualamos a cero la ecuación pasando los términos del miembro derecho al izquierdo con signo contrario. $3y - 12 - 2x + 6 = 0$

Ordenamos y multiplicamos $-2x + 3y - 6 = 0$

por -1 para cambiar el signo de $(-1)(\, -2x + 3y - 6 = 0)$

los términos. $2x - 3y + 6 = 0$

Así obtenemos la ecuación de la recta en su forma general. $2x - 3y + 6 = 0$

Trazo de la recta en el plano cartesiano:

Despejamos la variable y, pasando los términos de la variable x y la constante del otro lado de la igualdad.

$$3y = 2x + 6$$

$$y = \frac{2x}{3} + \frac{6}{3}$$

Simplificando $$y = \frac{2x}{3} + 2$$

Realizamos una tabla y proponemos 3 valores para x

x	y
0	2
3	4
6	6

Sustituimos los valores en nuestra ecuación $$y = \frac{2x}{3} + 2$$

$x = 0$ $$y = \frac{2(0)}{3} + 2$$

Realizamos las operaciones $$y = \frac{0}{3} + 2$$

Encontramos el valor de y $$y = 0 + 2 = 2$$

$x = 3$ $$y = \frac{2(3)}{3} + 2$$

Realizamos las operaciones $$y = \frac{6}{3} + 2$$

Encontramos el valor de y $$y = 2 + 2 = 4$$

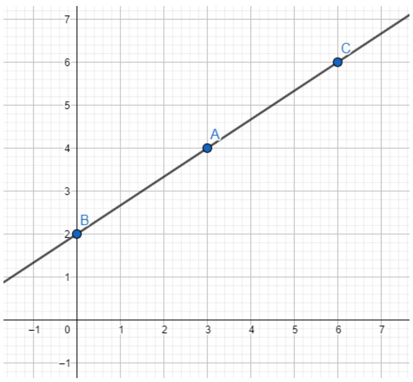
$x = 6$ $$y = \frac{2(6)}{3} + 2$$

Realizamos las operaciones $$y = \frac{12}{3} + 2$$

Encontramos el valor de y $$y = 4 + 2 = 6$$

Teniendo la tabla completa, graficamos los puntos en el plano cartesiano.

Trazamos la recta uniendo los puntos encontrados A (3,4), B (0,2) C (6,6)

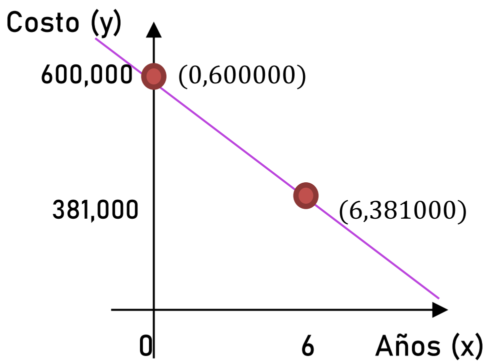


Ejemplo 2: En el CBTA 182 se tiene un tractor que inicialmente costó \$600,000.00, si sabemos que su valor disminuyó por el uso y que en 6 años el precio del tractor se devaluó \$219,000.00 pesos. ¿Cuál será el costo del tractor en 10 años?

Solución

Primero calculamos el valor del tractor a la fecha. $600{,}000 - 219{,}000 = 381{,}000$

Graficamos para obtener los datos.



Como podemos observar hay dos puntos y uno de ellos P_1 corresponde a la ordenada en el origen, por lo tanto, podemos usar la fórmula pendiente ordenada en el origen.

Datos: $P_1(0{,}600000)$ que corresponde a b

$P_2(6{,}381000)$

Calculamos la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Sustituimos los valores $m = \frac{381{,}000 - 600{,}000}{6-0}$

$m = \frac{-219{,}000}{6}$ $\quad m = -36{,}500$

Fórmula $y = mx + b$

$y = -36{,}500x + 600{,}000$

Sustituimos en "x" el numero de años en el que se desea calcular el valor del tractor. $x = 10\ años$

$y = -36{,}500(10) + 600{,}000$

Realizamos operaciones $y = -365{,}000 + 600{,}000$

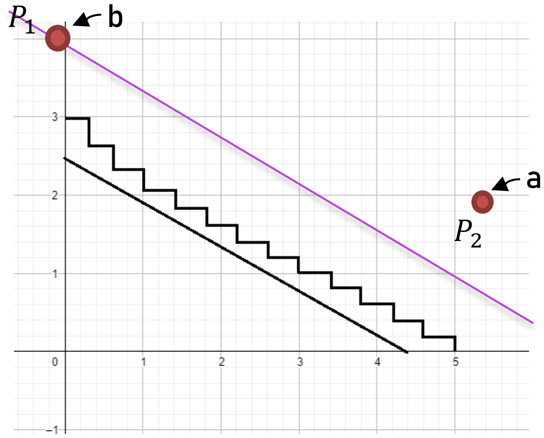
$y = 235{,}000$

Costo del tractor en 10 años: \$235,000.00 pesos

Ejemplo 3: En la casa de Don Luis se desea construir una escalera, si se tiene disponible un espacio de 5 metros para la base y 3 metros para la altura, aplica la ecuación en su forma simétrica para obtener la ecuación de la recta en su forma general.

Solución:

Datos: $P_1(5,0)$, $P_2(0,3)$ como sabemos 5 representa la abscisa por lo tanto a=5 y 3 representa la ordenada así b=3.



Fórmula $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Sustituimos $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$

Encontrar el M.C.M. (5)(3) = 15

haciendo la multiplicación de los denominadores.

Multiplicamos el MCM en ambos miembros.

$$(\cancel{15})\frac{x+y}{\cancel{15}}=1(15)$$

$$x+y=15$$

Igualamos a cero y esta es la ecuación buscada.

$$x+y-15=0$$

Ejemplo 4: Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-3,2) y B(5,-4).

Solución:

Datos
A(-3,2) y B(5,-4)

Fórmula

Como tenemos 2 puntos utilizamos la forma cartesiana.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Sustituimos.

$$\frac{y-2}{x-(-3)}=\frac{-4-2}{5-(-3)}$$

Eliminamos paréntesis.

$$\frac{y-2}{x+3}=\frac{-4-2}{5+3}$$

Realizamos operaciones.

$$\frac{y-2}{x+3}=\frac{-6}{8}$$

Eliminamos denominadores.

$$8(y-2)=-6(x+3)$$

Aplicamos propiedad distributiva.

$$8y-16=-6x-18$$

Igualamos a cero y ordenamos.

$$6x+8y-16+18=0$$

Realizamos operaciones.

$$6x+8y+2=0$$

Ecuación general.

$$6x+8y+2=0$$

Practicando

Resuelve las siguientes situaciones utilizando la metodología presentada para la resolución de ecuaciones de la recta.

En la escala Fahrenheit de temperaturas, el agua llega al punto de congelación a los 32 °F y al punto de ebullición a los 212 °F. En la escala Celsius el agua se congela a los 0 °C y alcanza el punto de ebullición a los 100°C. Determina la ecuación de la recta que representa esta relación.

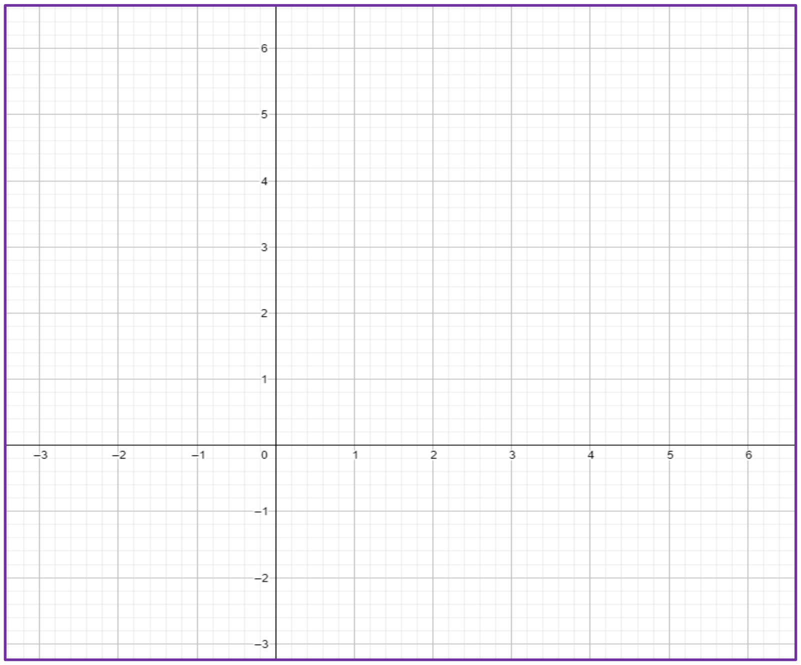
Proceso	Operaciones
Indica que fórmula vas a usar	
Sustituye valores	
Realiza operaciones	
Elimina denominadores	
Despeja la variable	
¿Cuál es la ecuación de la recta?	

Ernesto trabaja en una tienda de tecnología y computación donde le pagan \$200 pesos diarios y le dan una comisión de \$120 por cada computadora vendida. Expresa su ingreso "I" en función del número de computadoras "x" vendidas, por medio de una ecuación.

Proceso	**Operaciones**
Indica que fórmula vas a usar	
Sustituye	
¿Cuál es la ecuación que determina el ingreso?	

Encuentra la ecuación de la recta en cada caso y traza las rectas correspondientes.

1) $a = 3 \qquad b = 5$
2) $m = -2 \quad A(0,6)$



Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver el siguiente ejercicio

Encuentra la ecuación de la recta en cada caso y traza las rectas correspondientes.

3) $A(4,0) \qquad m = -2$

4) $A(-1,3) \quad B(5,4)$

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Soy capaz de calcular la pendiente e inclinación de una recta.		
Puedo identificar los elementos necesarios para encontrar la ecuación de la recta.		
Aplico la metodología para calcular cualquier ecuación de la recta.		
Establezco un modelo a partir los datos obtenidos de alguna situación.		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Khan Academy 3° Semestre Bachillerato, Ecuación de la recta. Disponible en: https://es.khanacademy.org/math/eb-3-semestre-bachillerato-nme/x4b655b3cb9bfe4eb:ecuacion-de-la-recta
- Matemáticas profe Alex, Pendiente y ángulo de inclinación de la recta conociendo dos puntos. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=sCC0Chz8QeI&t=6s
- Matemáticas profe Alex, Ecuación de la recta. Disponible en: https://www.youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dE1JAjLtnjoDTA5-oWq6m2w
- Superprof material didáctico, Pendiente de una recta. Disponible en: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/recta/pendiente-de-una-recta.html

Referencias

- Gilberto Orozco Mayren (2007). Geometría Analítica: teoría y sus aplicaciones. México. Trillas.
- Swokowski / Cole (2009). Algebra y trigonometría con geometría analítica. 12ª. Edición: Cengage Learning.
- Raymundo Acosta Sánchez (2011), Asómate a las Matemáticas 3. Geometría Analítica 1ª edición. Editorial progreso.

Imágenes tomadas de:

- https://www.klipartz.com/

Planos generados en:

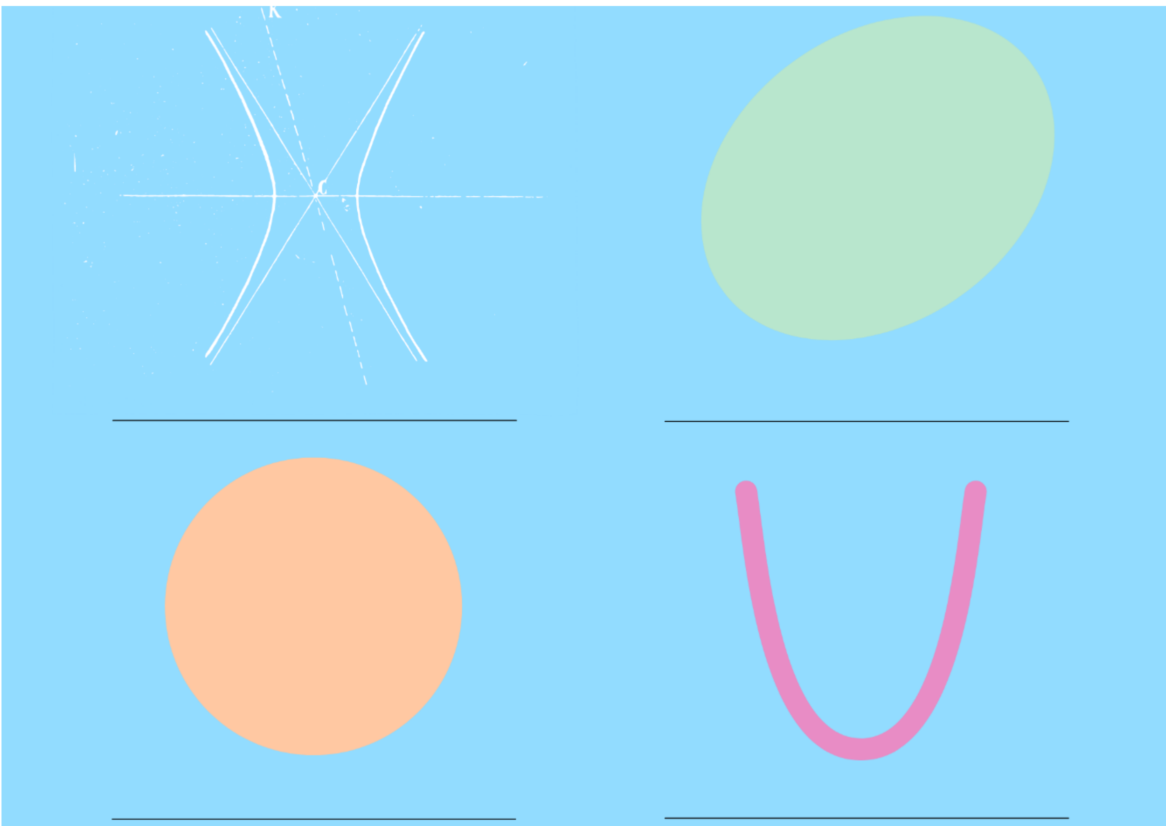
- https://www.geogebra.org/calculator

Lección 10. Secciones cónicas y circunferencia

Explorando

Observa las figuras que se muestran y escribe su nombre sobre la línea.

Elipse	Parábola	Circunferencia	Hipérbola



Contesta las preguntas utilizando la información que se proporciona.

Una rueda de la fortuna tiene un diámetro de 74 m y una altura de 78 m.

¿Cuál es el radio de la rueda? _______________

¿A qué altura está el centro de la rueda? _______________

Si una persona se ubica en la coordenada o (0, 0), ¿Cuál es la coordenada del centro de la rueda? _______________

Comprendiendo

Definición básica de las cónicas

Se denomina sección cónica (o simplemente cónica) a todas las curvas resultantes de las diferentes intersecciones entre un cono y un plano; si dicho plano no pasa por el vértice, se obtienen las cónicas propiamente dichas.

Se clasifican en cuatro tipos: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola

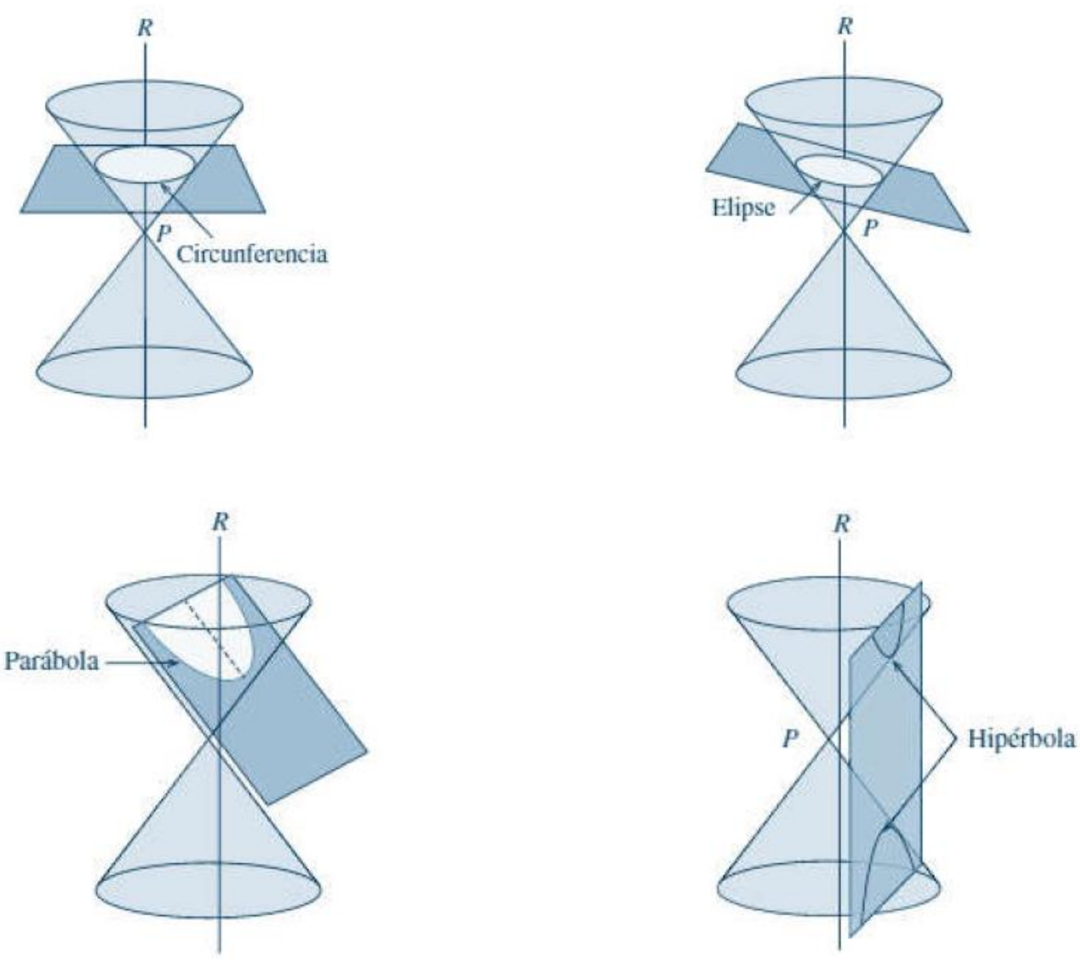


Figura 1 *Formación de las cuatro cónicas básicas.*

Cada una de las cónicas se puede representar por medio de una expresión algebraica, esta ecuación que describe a las cónicas recibe el nombre de **ecuación general** de una sección cónica, y su expresión es:

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Donde:

- El coeficiente B indica si la cónica tiene rotación o no, si B = 0 la cónica no está rotada.
- Los coeficientes D y E indican si la cónica esta traslada o no, si D = E = 0 la cónica está centrada en el origen.
- El término independiente F indica si la cónica pasa o no por el origen, si F = 0, entonces la cónica si pasa por el origen.

<table>
<tr><th colspan="2">Cónica</th><th colspan="3">Con traslación</th><th>Sin traslación</th></tr>
<tr><td>Circunferencia</td><td>A=C</td><td rowspan="5">D≠0
E≠0

Centro fuera del origen.
En (h, k)</td><td rowspan="5">D=0
E≠0

Centro sobre el eje Y.
En (0, k)</td><td rowspan="5">D≠0
E=0

Centro sobre el eje X.
En (h, 0)</td><td rowspan="5">D=0
E=0

Centro en el origen</td></tr>
<tr><td>Elipse</td><td>A≠C
(mismo signo)</td></tr>
<tr><td>Hipérbola</td><td>A≠C
(signos contrarios)</td></tr>
<tr><td>Parábola horizontal</td><td>A=0, C≠0</td></tr>
<tr><td>Parábola vertical</td><td>A≠0, C=0</td></tr>
</table>

A continuación se muestran algunos ejemplos:

Para determinar el tipo de cónica que representa la ecuación lo primero debes hacer es identificar los coeficientes de acuerdo con la ecuación general, en este caso quedaría de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \qquad \boldsymbol{4x^2 + 9y^2 - 36 = 0}$$

- Se observa que A ≠ C y son del mismo entonces la cónica es una **elipse**, en este caso 4 ≠ 9 por lo tanto cumple con la condición.
- Los coeficientes D = E = 0 indican que el centro de la elipse está en el origen.
- El término independiente F = -36 indica que la elipse no pasa por el origen.

Ahora se va a determinar y graficar el tipo de cónica que representa la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{16x^2 - 9y^2 - 32x - 9y + 100 = 0}$$

- Se observa que A ≠ C y son de signo contrario, por lo que se trata de una **hipérbola**.

- Los coeficientes D = -32 y E = -9 indican que el centro de la hipérbola está fuera del origen.
- El término independiente F = 100 indica que la hipérbola no pasa por el origen

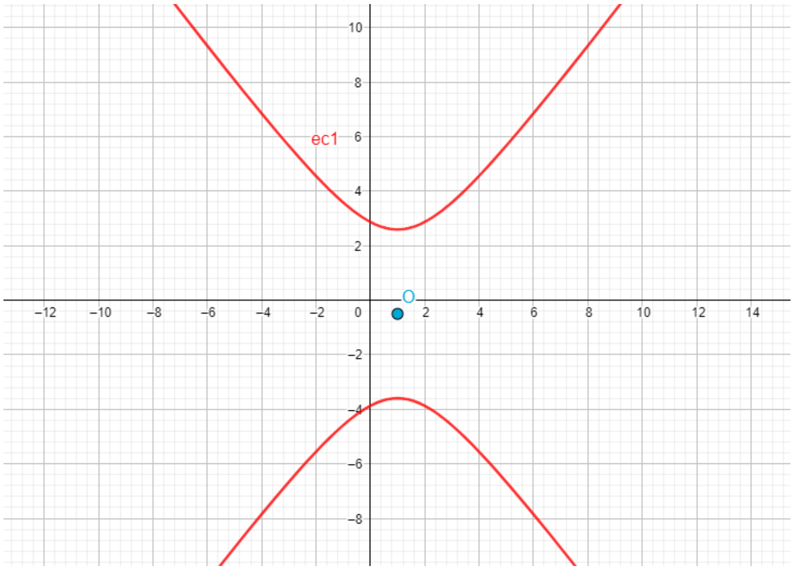


Figura 2 Gráfica de la sección cónica $16x^2 - 9y^2 - 32x - 9y + 100 = 0$

Definición, elementos y ecuación canónica

La **circunferencia** es una figura geométrica plana y cerrada que se caracteriza porque todos los puntos que la conforman se encuentran a la misma distancia del centro. Dicha distancia permanente se denomina radio.

La **circunferencia** se define como el lugar geométrico de los puntos en el plano P (x, y) equidistantes de un punto fijo llamado centro. Todos los puntos que pertenezcan a una circunferencia tienen la misma distancia entre el lugar geométrico y el punto fijo.

Los elementos de la circunferencia son:

- **Centro**. Punto del que equidistan todos los puntos de la circunferencia.
- **Radio**. Segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.
- **Diámetro**. Cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- **Cuerda**. Segmento que une dos puntos de la circunferencia.,
- **Tangente.** Es la línea recta que toca a la circunferencia en un solo punto.

Para obtener la ecuación de la circunferencia con centro en el origen se toma una circunferencia donde el radio es igual a (r) y donde este se forma por un punto O (0, 0) y un punto P (x, y). Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos se tiene:

$$d(O,P) = r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$r = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

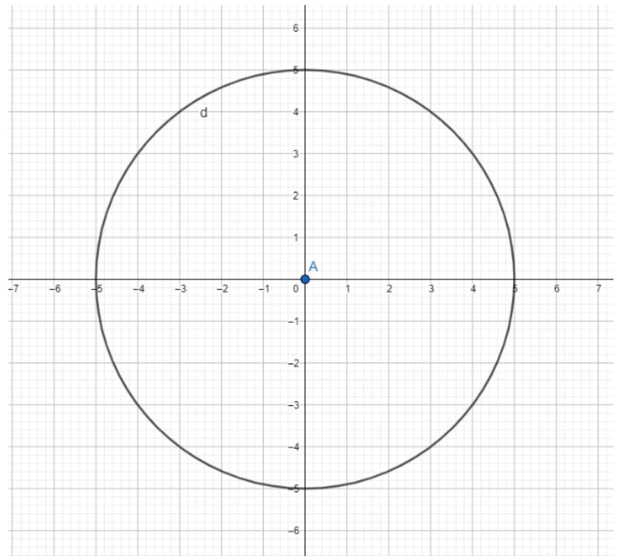
La expresión resultante también se puede representar como:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Esta expresión se conoce como ecuación canónica de la circunferencia.

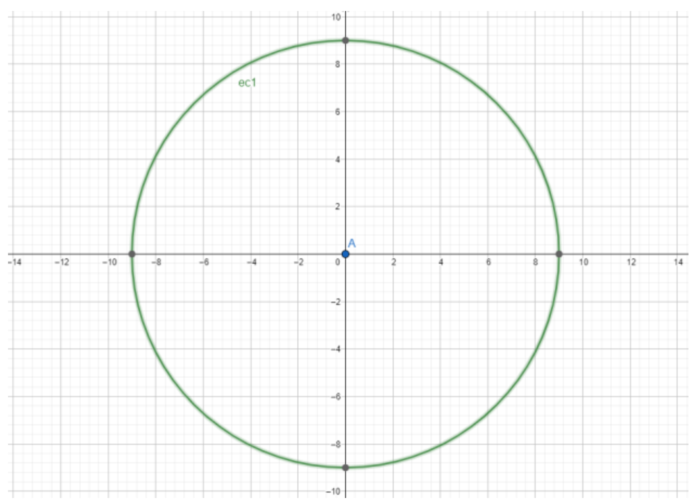
Por ejemplo, para determinar el radio de la circunferencia a partir de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ debes sustituir $r^2 = 25$ en la ecuación y queda de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{25})^2$$
$$x^2 + y^2 = 5$$



El radio es 5 como se muestra en la gráfica.

En el siguiente ejemplo debes encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es de 18 cm.



- El diámetro es igual a dos radios, por lo tanto:
  D=18, entonces 2r=18
  al despejar queda $r = \frac{18}{2}$
  Entonces $r = 9$

- Se sustituye r en la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y queda:

  $x^2 + y^2 = 9^2$

  $x^2 + y^2 = 81$

Ahora observa el ejemplo para graficar y encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.

El radio pasa por el punto P (6, 4)

- Si P (x, y), se sabe que x=6 y=4
- Se sustituye en la formula $x^2 + y^2 = r^2$ y queda:

$$6^2 + 4^2 = r^2$$

$$36 + 16 = r^2$$

$$52 = r^2$$

$$\sqrt{52} = r$$

- La ecuación de la circunferencia que pasa por el punto P (6, 4) es:

$$x^2 + y^2 = 52$$

Ecuación ordinaria y general

Cuando se observa que P (x, y) es un punto cualquiera de la circunferencia y C (h, k) es el centro de ella.

De acuerdo con el teorema de Pitágoras los catetos están formados por los lados (x-h) y (y-k) y la hipotenusa es el radio (r), por lo tanto:

$$(x-h)^2(y-k)^2 = r^2$$

Lo anterior se conoce como **ecuación ordinaria de la circunferencia**, con centro (h, k) y radio (r). Al desarrollar los binomios al cuadrado, de lado izquierdo de la ecuación obtenemos:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

Se iguala a 0 y se reordenan los términos:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Posteriormente se agrupan por términos para establecer las siguientes equivalencias:

$$D = -2h$$

$$E = -2k$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2$$

Se sustituyen las equivalencias en la ecuación resultando lo siguiente:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

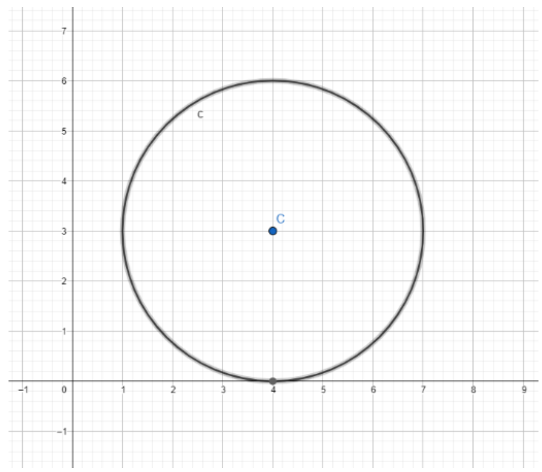
Nombrando a esta ecuación de la **forma general** o **ecuación de la circunferencia**.

A continuación se muestras algunos ejemplos de aplicación.

Para encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en C (4, 3) y radio r=3 y trazar su gráfica se debe emplear la ecuación ordinaria de la circunferencia

$$(x-h)^2(y-k)^2 = r^2$$

En donde C (4, 3), h = 4y K = 3



Se sustituyen los valores anteriores en la ecuación:

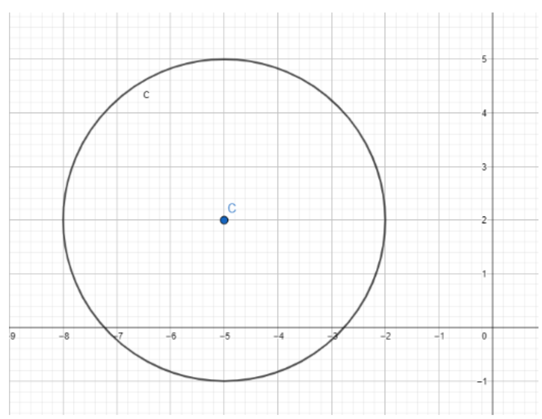
$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3^2$$

Por lo tanto, resulta:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$$

Y se gráfica como se muestra en la imagen.

Para encontrar la ecuación general de la circunferencia con los siguientes datos: C (-5, 2) y radio =3 y trazar su gráfica se debe:



Identificar que C (-5, 2), h = -5 y k = 2, r = 3

Sustituir los valores anteriores en la ecuación ordinaria $(x-(-5))^2 + (y-2)^2 = 3^2$

Se multiplican los signos para obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 9$

Se desarrollan los productos notables, se agrupan los términos, se simplifica, se iguala a cero y se ordena para obtener la ecuación general.

$$x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$$

Practicando

Observa las siguientes ecuaciones y de acuerdo con sus características determina el tipo de cónica que representa cada ; escribe el nombre en la línea.

elipse	parábola	circunferencia	hipérbola

1. $y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ ____________________
2. $x^2 - 4y - 2x - 24y + 21 = 0$ ____________________
3. $9x^2 - 4y - 36x + 16y + 56 = 0$ ____________________
4. $x^2 + 4x - 2y + 10 = 0$ ____________________
5. $x^2 + y^2 - 36 = 0$ ____________________
6. $-3x^2 - 3y^2 + 18x + 18y - 27 = 0$ ____________________
7. $16x^2 - 9y^2 + 96x - 72y - 144 = 0$ ____________________

Encuentra la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen dados los siguientes datos y traza su gráfica.

1. Radio igual a 2
2. Radio igual a $\sqrt{12}$
3. Diámetro igual a 14
4. Diámetro igual a 8/12
5. Circunferencia que pasa por el punto (2, 3)
6. Circunferencia que pasa por el punto (0, -5)
7. Diámetro cuyos extremos son los puntos (4, 0) y (-4, 0)
8. Circunferencia que pasa por el punto (2, -6).

Encuentra la ecuación ordinaria y la ecuación general de la circunferencia con los datos proporcionados y traza su gráfica.

1. Centro (5, -3) y radio = $\sqrt{20}$

2. Centro (-3, 5) y pasa por el punto (5, 1)

Autoevaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Logro reconocer cada uno de los diferentes tipos de secciones cónicas básicas.		
Puedo saber cuándo una sección cónica básica tiene su centro en el origen o fuera.		
Logro determinar el radio de una circunferencia a partir de una ecuación canónica.		
Soy capaz de obtener el radio de una circunferencia.		
Puedo identificar los elementos de una circunferencia.		
Puedo diferencia entre una ecuación ordinaria y una ecuación en su forma general de la circunferencia.		
Comprendo que el centro de las circunferencias puede estar fuera de del origen y obtener su ecuación.		
En el caso de que hayas respondido “Tengo dudas” en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Geometría analítica. (2018, 17 abril), Secciones cónicas. Disponible en: https://www.geometriaanalitica.info/secciones-conicas/
- Pi-ensa Matematik (2017, 30 septiembre), *¿Qué y Cuáles son las secciones Cónicas?* Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=a26ErrkU_-M
- UNAM (s. f.) *La circunferencia dados el centro y el radio*. Disponible en: http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_057/index.html
- Barrera S. (2010) *Ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen en forma estándar y general*. Disponible en: https://www.uaeh.edu.mx/docencia/P_Presentaciones/prepa_ixtlahuaco/2017/geometria.pdf
- MateFacil (s. f.) *Ecuación ordinaria y general de circunferencia con centro y radio dados.* Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=JPnNdV3lZH4
- Emmanuel asesorías (2020) *Ecuación de la CIRCUNFERENCIA (Ecuación ORDINARIA y GENERAL)*. Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=eYvtVn-BBnQ

Referencias

- Lehmann C., (1989), *Geometría analítica Ed*. Limusa México D. F.
- Caballero A., Martínez L. & Bernárdez J., (2006), *Geometría analítica*. Ed. Esfinge
- Aguilar J & Cabello S., (2013), *GMA, Geometría analítica*, Castillo / Macmillan
- Guerrero S., (2014), *Geometría analítica*, Ed. Grupo editorial patria
- Garza B., (2014) *Geometría analítica*. Ed. Pearson
- Rumbos I., (2011) Geometría analítica. Ed. Trillas

Imágenes tomadas de:

- https://www.canva.com/es_mx/
- https://pixabay.com/es/
- https://www.pexels.com/es-es/

Lección 11. La parábola

Explorando

Responde a las siguientes preguntas y elige la que consideres que es la correcta.

1. ¿Cuál de las siguientes funciones es una ecuación cuadrática?

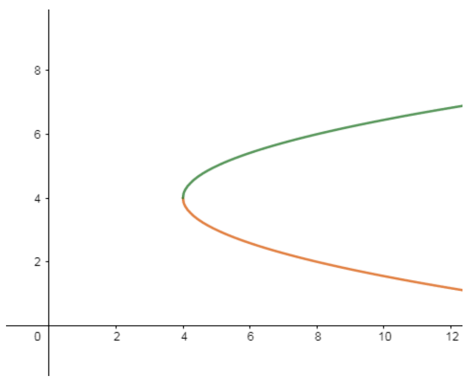
   a) $y = 8x + 3$
   b) $y = e^x + 3$
   c) $y = logx + 1$
   d) $y = x^2 - 4$

2. ¿Cuáles son los componentes que tiene una parábola?

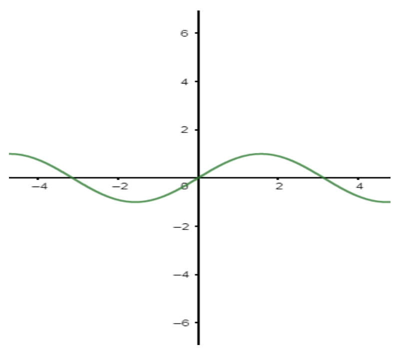
   a) No tiene lados
   b) Ángulo axial, simétrico y tangencial.
   c) Un foco y una directriz
   d) Un radio y un cuadrado

4. ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde a una parábola?

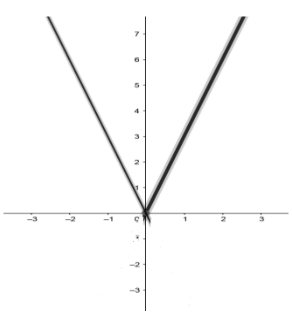
a)



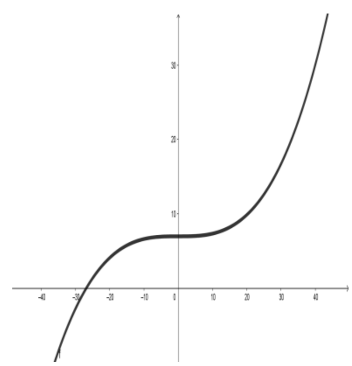
b)



c)



d)



Comprendiendo

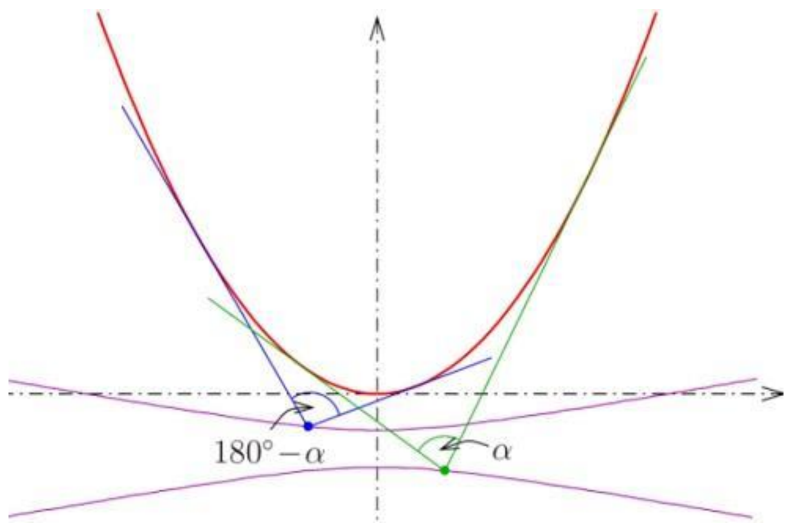
Reseña histórica

Apolonio Perga (262-190 a.C.) conocido como "*el gran geómetra*", realizó trabajos que tuvieron gran influencia en el desarrollo de las matemáticas, en particular en su famoso libro *Las cónicas*, donde se introdujo términos como la parábola, elipse e hipérbola.

Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes, que se utilizan actualmente para definirlas, siendo una de ellas la reflexión. De este modo, si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira.

Las **aplicaciones de la parábola en la vida cotidiana** son múltiples. Desde el uso que le dan las antenas satelitales y radiotelescopios para concentrar las señales hasta el uso que le dan los faros de los automóviles al enviar haces de luz paralelos.

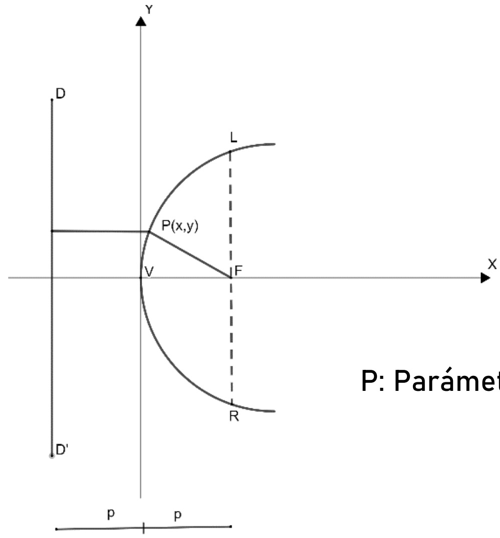
Una parábola, en términos sencillos, puede definirse como una curva en la que los puntos están equidistantes con respecto a un punto fijo y una recta. El punto fijo se denomina *foco* y la recta se le conoce como *directriz*.



Definición de parábola

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que equidistan de un punto fijo llamado *foco*, y una recta fija, llamada *directriz*.

En la siguiente imagen podrás observar un ejemplo de parábola en la trayectoria que lleva un balón de futbol cuando se realiza un tiro a gol.



$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Elementos de una parábola:

V: Vértice

F: Foco

$\overline{DD'}: Directriz$

LR: Lado recto, $LR = |4p|$

P: Parámetro (distancia del vértice al foco o a la directriz)

Ejemplo: Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del punto F(0,3) y de la recta $\boldsymbol{y+3=0}$.

Como se desconoce la distancia del punto $p(x, y)$ al foco, tomaremos la coordenada del foco y encontraremos la distancia que existen entre ambos puntos $\overline{PF} = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Solución

Con la fórmula de distancia entre dos puntos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y distancia de un punto a una recta $d = \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$, se obtiene la distancia del punto P(x, y) a F y a la recta:

$$\overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \cdot \overline{PD} = \frac{y+3}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

Al igualar:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = y + 3$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = (y+3)^2$$

Se desarrolla y se simplifica para obtener la ecuación del lugar geométrico, denominada parábola.

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 - y^2 - 6y - 9 = 0$$

$$x^2 - 12y = 0$$

Ecuación de la parábola con vértice en el origen

Sea una parábola con vértice en el origen, foco *F(p,0)* donde *p* es el parámetro y su directriz *x= -p*. Se toma un punto P(*x, y*) que cumpla con las condiciones de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, y la distancia de un punto a una recta $d = \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$, se obtienen las distancias del punto P al foco y a la directriz.

La distancia P a la del foco es: $\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$

La distancia de *P* a la recta $x + p = 0$ es:

$$\overline{PF} = \frac{1(x)+0(y)+p}{\sqrt{1^2+0^2}} = x + p$$

Ahora se igualan las distancias:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se determina que:

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2 = (x+p)^2$$

$$(x-p)^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 - x^2 - 2px - p^2 = 0$$

$$y^2 - 4xp = 0$$

Si el foco está sobre el eje Y, *F (0, p)* donde el *p* es el parámetro y su directriz la recta $y = -p$ y vértice en el origen, al aplicar la definición el resultado es el siguiente: $\sqrt{(y-p)^2 + x^2} = y + p$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se obtiene:

$$\left(\sqrt{(y-p)^2 + x^2}\right)^2 = (y+p)^2$$

$$(y-p)^2 + x^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$y^2 - 2py + p^2 + x^2 - y^2 - 2py - p^2 = 0$$

$$x^2 - 4py = 0$$

Elementos y ecuación de una parábola con vértice en el origen

Parábola horizontal

Su foco está sobre el eje X y son cóncavas hacia la derecha o a la izquierda.

Ecuación cónica

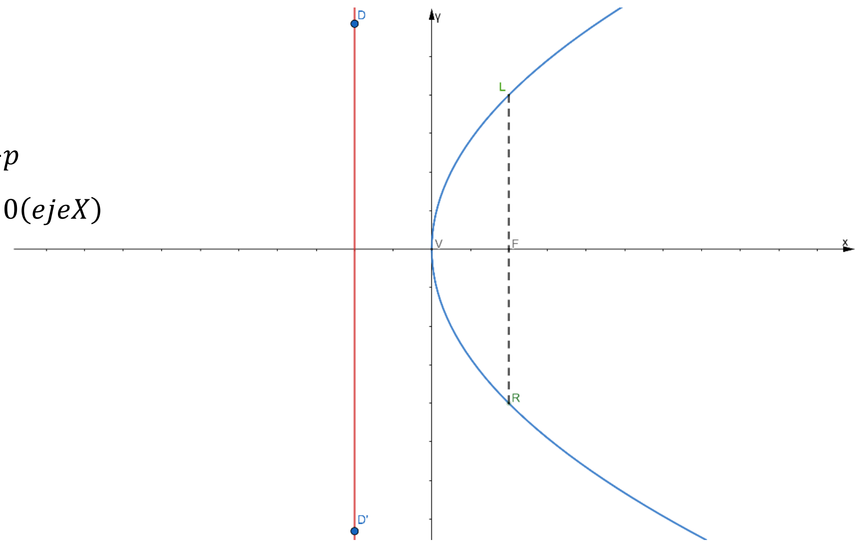
$y^2 = 4px$

Foco: *F(p,0)*

Directriz $(\overline{DD'})$: $x = -p$

Ecuación del eje: $y = 0(ejeX)$

Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$



Concavidad

- Si *p > 0* entonces la parábola abre hacia la derecha.
- Si *p < 0* entonces la parábola abre hacia la izquierda.

Ejemplo: Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es $y^2 - 8x = 0$.

Solución

Tomando la ecuación $y^2 - 8x = 0$

Dada la función (ecuación) se sustituye en su ecuación cónica de la siguiente manera: $y^2 = 4px$

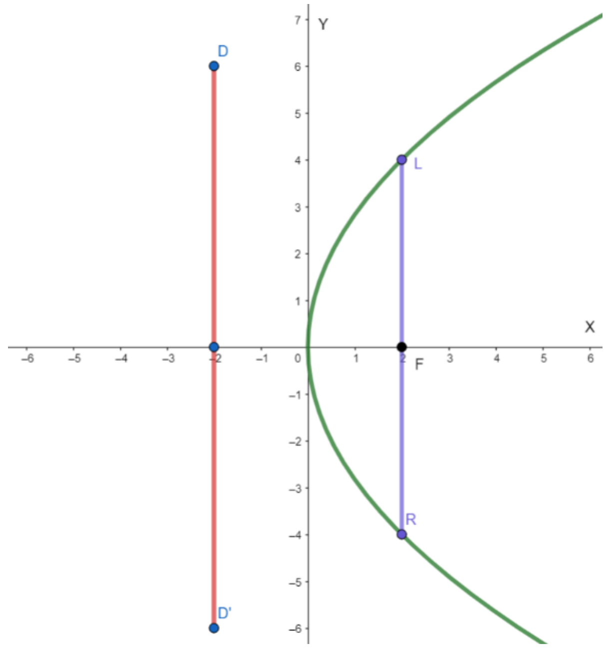
Considerando el orden de la ecuación cónica, se despeja y^2

$$y^2 - 8x = 0 \qquad \rightarrow \qquad y^2 = 8x$$

Donde $4p = 8 \rightarrow p = \frac{8}{4} \rightarrow p = 2$

Es una parábola horizontal y abre hacia la derecha, al sustituir en las fórmulas se obtiene sus elementos y posteriormente su gráfica.

Foco: F(*p, 0*) = F(2, 0)
Directriz: x = *-p* → $x = -2$
Lado recto: $LR = |4(2)| = 8$
Eje: $y = 0$



Parábola vertical

Su foco está sobre *Y*, son cóncavas hacia arriba o hacia abajo.

Ecuación cónica

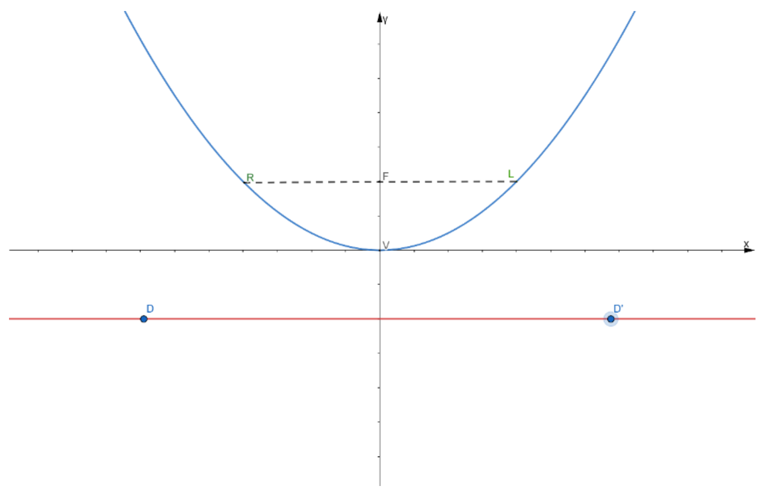
$x^2 = 4px$

Foco: *F* (0, p)

Directriz $(\overline{DD'})$: $y = -p$

Ecuación del eje: $x = 0(eje\ Y)$

Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$



Concavidad

- Si *p* > 0 entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si *p* < 0 entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

Ejemplo: Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es:

$$\mathbf{3x^2 - 12y = 0}$$

Solución

Se escribe la ecuación en su fórmula cónica: $x^2 = 4py$

$$3x^2 - 12y = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 12y \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{12y}{3} \quad \rightarrow x^2 = 4y$$

Donde: $4p = 4 \ \rightarrow p = \frac{4}{4}, entonces\ p = 1$

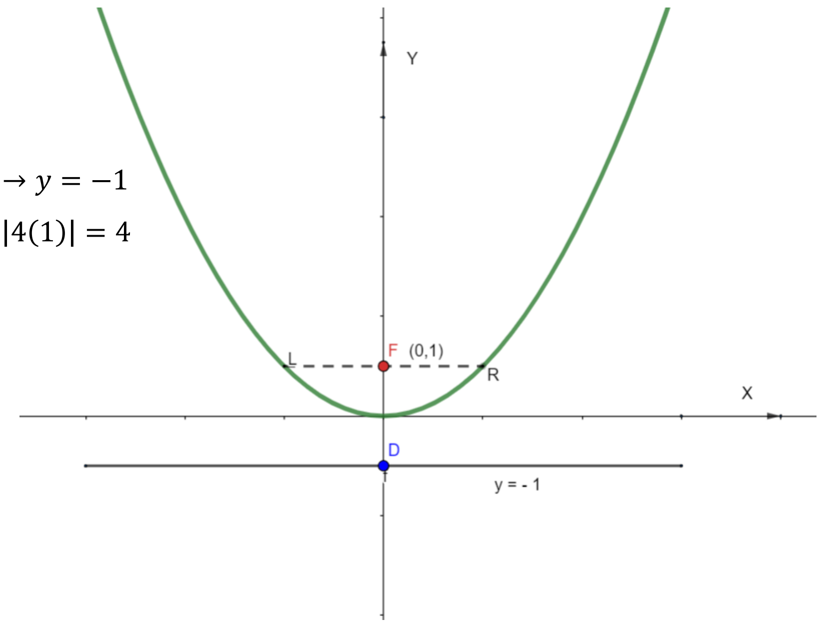
Es una parábola vertical y abre hacia arriba, al sustituir en las fórmulas se determinan los elementos y posteriormente la gráfica:

Foco: $F(0, P)$

Directriz: $y = -p \rightarrow y = -1$

Lado recto: $LR = |4(1)| = 4$

Eje: x = 0



Ecuación de la parábola con vértice en el punto (h, k)

Sea una parábola con vértice fuera del origen en (h, k), coordenadas del foco *F* (h+p,k) donde *p* es el parámetro y su directriz *x = h – p.* toma un punto P(x, y) que cumpla con la condición de que la distancia del foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Elementos y ecuación de una parábola con vértice en *(h, k)*

Parábola horizontal

Su eje es paralelo al eje X y es cóncava hacia la derecha o izquierda.

Ecuación ordinaria

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Ecuación general

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

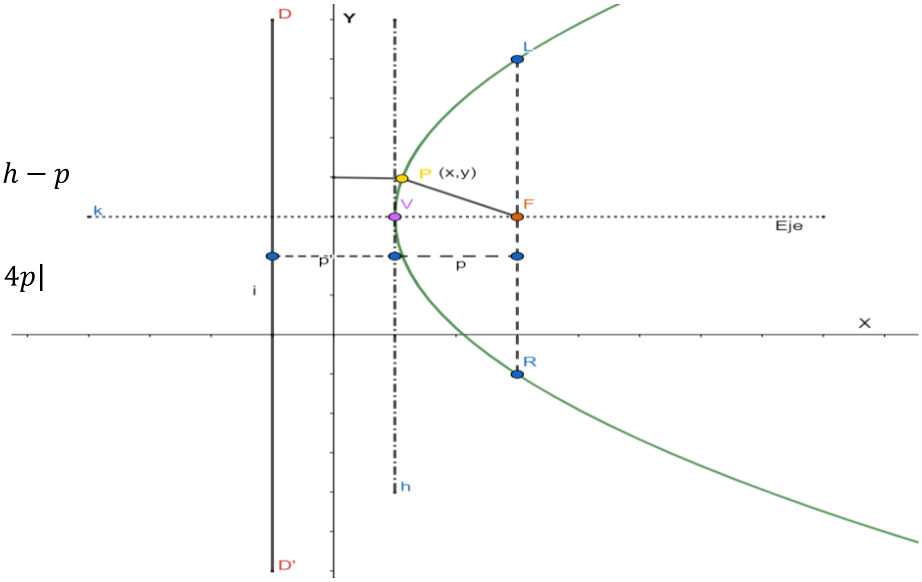
Vértice: V(h, k)

Foco: F$(h + p, k)$

Directriz $\overline{DD'}: x = h - p$

Eje: y = k

Lado recto: $LR = |4p|$



Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia la derecha.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia la izquierda.

Ejemplo: Determina los elementos y grafica la parábola $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$

Solución

El término cuadrático es *y*, por lo tanto, la parábola es horizontal, entonces se agrupan los términos con *y* en el primer miembro de la igualdad.

$$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$$

$$y^2 - 6y = 8x - 17$$

Se completa el cuadrado perfecto en el primer miembro y se factoriza.

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 17 + 9$$

$$(y - 3)^2 = 8x - 8$$

Se factoriza el segundo miembro de la igualdad, tomando como factor común el coeficiente de la literal:

$$(y - 3)^2 = 8(x - 1)$$

La ecuación que se obtiene es de la forma: $(\mathrm{y} - \mathrm{k})^2 = 4\mathrm{p}(\mathrm{x} - \mathrm{h})$, por consiguiente, el vertice es el punto:

$$\mathrm{V}(1{,}3), 4\mathrm{p} = 8, \text{de donde p} = 2.$$

Se sustituyen en los elementos de la parábola horizontal

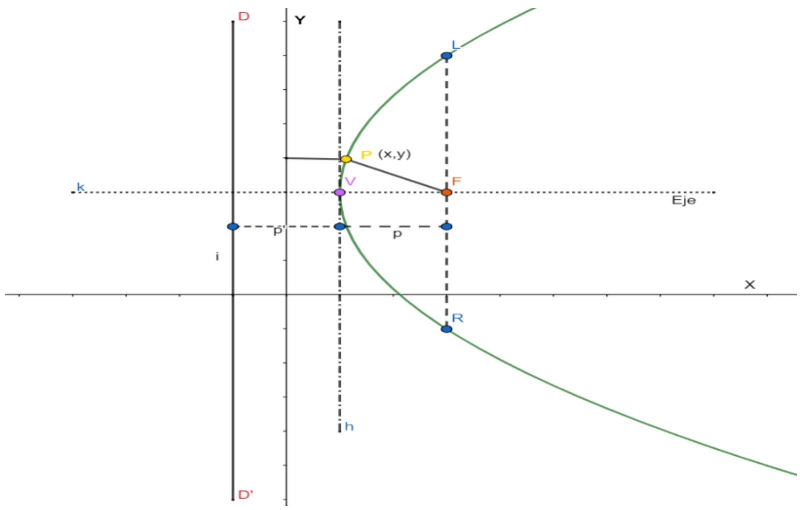
Foco:$F(h + p, k) = F(1 + 2, 3) = F(3{,}3)$

Directriz: $x = h - p = 1 - 2 = -1 \rightarrow x + 1 = 0$

Lado recto: $LR = |4p| = |4(2)| = |8| = 8$

Ecuación del eje: $y = k; y = 3$

Gráfica



Parábola vertical

Su eje es paralelo al eje Y, y es cóncava hacia arriba o abajo.

Ecuación ordinaria

$$(y - h)^2 = 4p(y - k)$$

Ecuación general

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

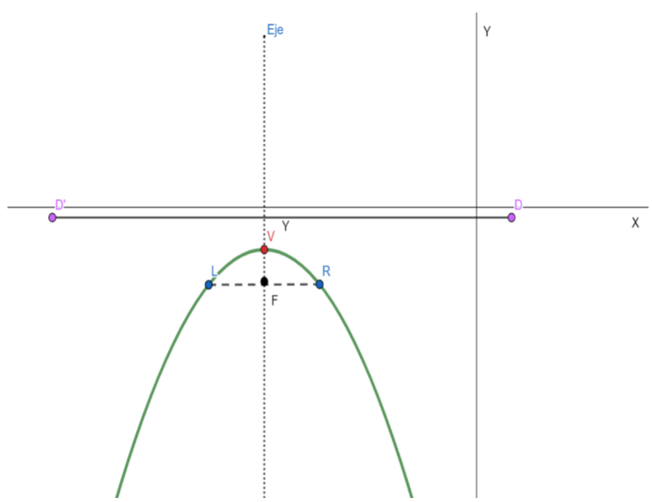
Vértice: V(h, k)

Foco: F$(h, k + p)$

Directriz $\overline{DD'}$: $x = k - p$

Eje: x = h

Lado recto: $LR = |4p|$



Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

Ejemplo: encuentra las coordenadas del vértice, el foco, la longitud del lado recto, la ecuación de la directriz y del eje de la parábola $4x^2 + 48x + 12y + 156 = 0$.

Solución

La parábola es vertical, ya que el término cuadrático es x; para transformarla a su forma ordinaria se realiza lo siguiente:

$4x^2 + 48x + 12y + 156 = 0$ Se divide la ecuación entre 4.

$x^2 + 12x + 3y + 39 = 0$

$x^2 + 12x = -3y - 39$ Se agrupan los términos en x.

$x^2 + 12x + 36 = -3y - 39 + 36$ Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$x^2 + 12x + 36 = -3y - 3$

$(x + 6)^2 = -3(y + 1)$ Se factoriza cada miembro.

La ecuación obtenida es de la forma:$(x - h)^2 = 4p(y - k)$, por lo tanto, el vértice tiene como coordenadas $V(-6, -1), 4p = -3 \; donde \; p = -\frac{3}{4}$.

Se sustituye en las fórmulas de los elementos para la parábola vertical:

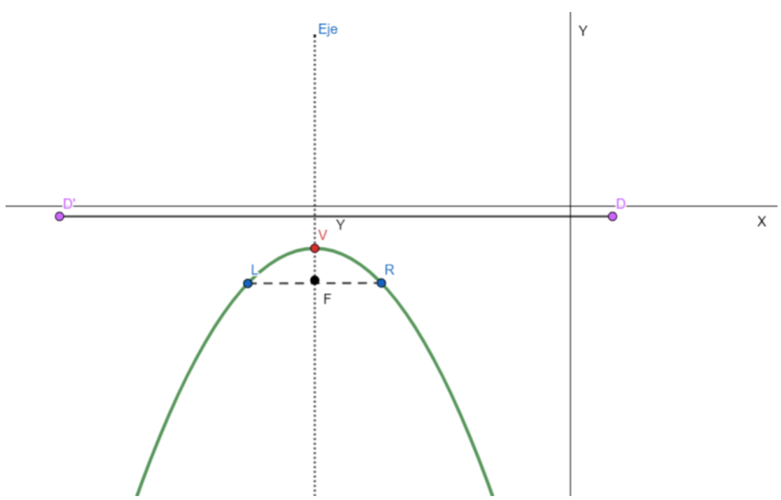
Foco:$F(h, k + p) = F\left(-6, -1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\right) = F\left(-6, -\frac{7}{4}\right)$

Directriz: $y = k - p$

$$y = -1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad y + \frac{1}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad 4y + 1 = 0$$

Lado recto: $|4p| = \left|4\left(-\frac{3}{4}\right)\right| = |-3| = 3$

Eje: $x = h$ $x = -6 \;\rightarrow\; x + 6 = 0$



Ecuación de la parábola que pasa por tres puntos

Dados los tres puntos P_1, P_2 y P_3, que pertenece a una parábola horizontal o vertical, su ecuación se obtiene mediante las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones generales de la parábola

Parábola horizontal

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

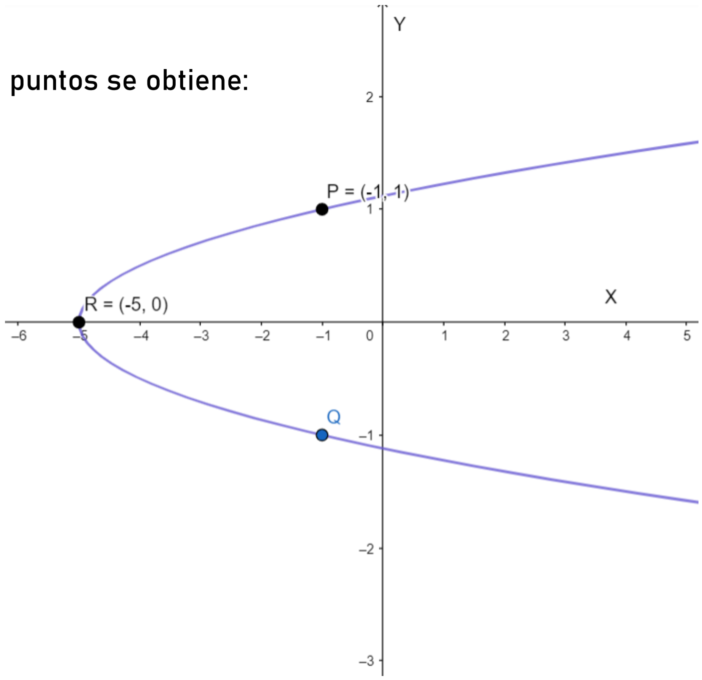
Parábola vertical

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ejemplo: Determina la ecuación general de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los puntos: $\boldsymbol{P(-1,1), Q(-1,-1)}$ y $\boldsymbol{R(-5,0)}$

Solución

Al graficar los puntos se obtiene:



El eje es paralelo al eje X, entonces la parábola es horizontal y la ecuación que se utiliza es:

$$\mathrm{y}^2 + \mathrm{Dx} + \mathrm{Ey} + \mathrm{F} = 0$$

Al sustituir los puntos $\mathrm{P}(-1,1), \mathrm{Q}(-1,-1)$ y $\mathrm{R}(-5,0)$, se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas:

Para el punto $\mathrm{P}(-1,1)$ $\quad (1)^2 + \mathrm{D}(-1) + \mathrm{E}(1) + \mathrm{F} = 0$

Ecuación 1: $\quad -\mathrm{D} + \mathrm{E} + \mathrm{F} = -1$

Para el punto $\mathrm{Q}(-1,-1)$ $\quad (-1)^2 + \mathrm{D}(-1) + \mathrm{E}(-1) + \mathrm{F} = 0$

Ecuación 2: $\quad -\mathrm{D} - \mathrm{E} + \mathrm{F} = -1$

Para el punto $\mathrm{R}(-5,0)$ $\quad (0)^2 + \mathrm{D}(-5) + \mathrm{E}(0) + \mathrm{F} = 0$

Ecuación 1: $\quad -5\mathrm{D} + \mathrm{F} = 0$

Se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$-\mathrm{D} + \mathrm{E} + \mathrm{F} = -1$$

$$-\mathrm{D} - \mathrm{E} + \mathrm{F} = -1$$

$$-5\mathrm{D} + \mathrm{F} = 0$$

Al resolver el sistema se obtiene: $\mathrm{D} = -\frac{1}{4}, \mathrm{E} = 0, \mathrm{F} = -\frac{5}{4}$.

Se sustituyen estos valores en $\mathrm{y}^2 + \mathrm{Dx} + \mathrm{Ey} + \mathrm{F} = 0$ y se simplifica:

$$\mathrm{y}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{x} + (0)\mathrm{y} - \frac{5}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad 4\mathrm{y}^2 - \mathrm{x} - 5 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola es $4\mathrm{y}^2 - \mathrm{x} - 5 = 0$

Ecuación de una recta tangente a una parábola

Se tiene una parábola con vértice en el origen y una tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

Horizontal: $y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$ **Vertical:** $y - y_0 = \frac{2y_0}{x_0}(x - x_0)$

Si tiene una parábola con vértice (h,k) fuera del origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

Horizontal: $y - y_0 = \frac{y_0 - k}{2(x_0 - h}(x - x_0)$ **Vertical:** $y - y_0 = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0)$

Ejemplo: Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $\boldsymbol{y^2 - 12x = 0}$, en el punto (3,6).

Solución

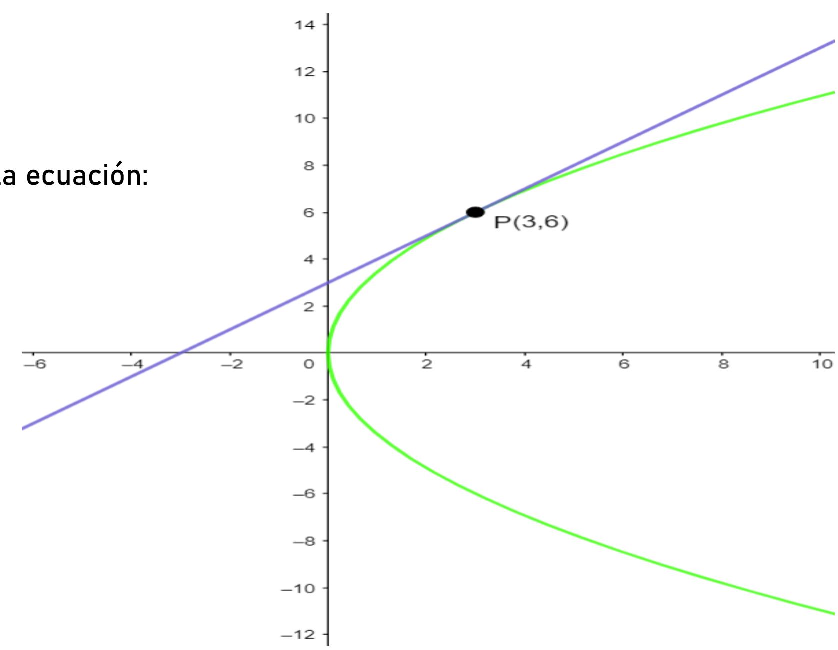
Se sustituye el punto (3,6) en la fórmula:

$$y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$$

$$y - 6 = \frac{6}{2(3)}(x - 3)$$

De donde se obtiene la ecuación:

$$x - y + 3 = 0$$



Practicando

Resuelve los siguientes problemas.

Definición de parábola.

1. Un punto se mueve en el plano de tal manera que equidistan del punto $(0,1)$ y de la recta $y-1=0$. Encuentra la ecuación del lugar geométrico que describe.

Se desconoce la distancia del punto $p(x,y)$ al foco, se busca encontrar la distancia entre ambos puntos, dada por $\overline{PF}=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Utilizando la fórmula de distancia $\overline{PF}$ y distancia de un punto a una recta dada por la fórmula $d=\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$, se obtiene la distancia del punto P(x, y) a F y a la recta:

$$\overline{PF}=\sqrt{(x_2-x_1)^2}\ \overline{PD}=\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Sustituye de acuerdo con los datos del problema recta $y-1=0$, $punto\ (0,1)$.

Se igualan:

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

Se desarrolla y se simplifica para obtener la ecuación del lugar geométrico, denominada parábola.

Ecuación de la parábola con vértice en el origen

Grafica y determina las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y la ecuación del eje de la siguiente parábola.

1. $y^2 = -4x$

Ecuación de la parábola horizontal con vértice en origen está dada por:

$$y^2 = 4px$$

De la ecuación $y^2 = -4x$ se sustituye en su ecuación cónica y se determina el valor de p .

$4p$ = $\rightarrow p =$ $\rightarrow p =$

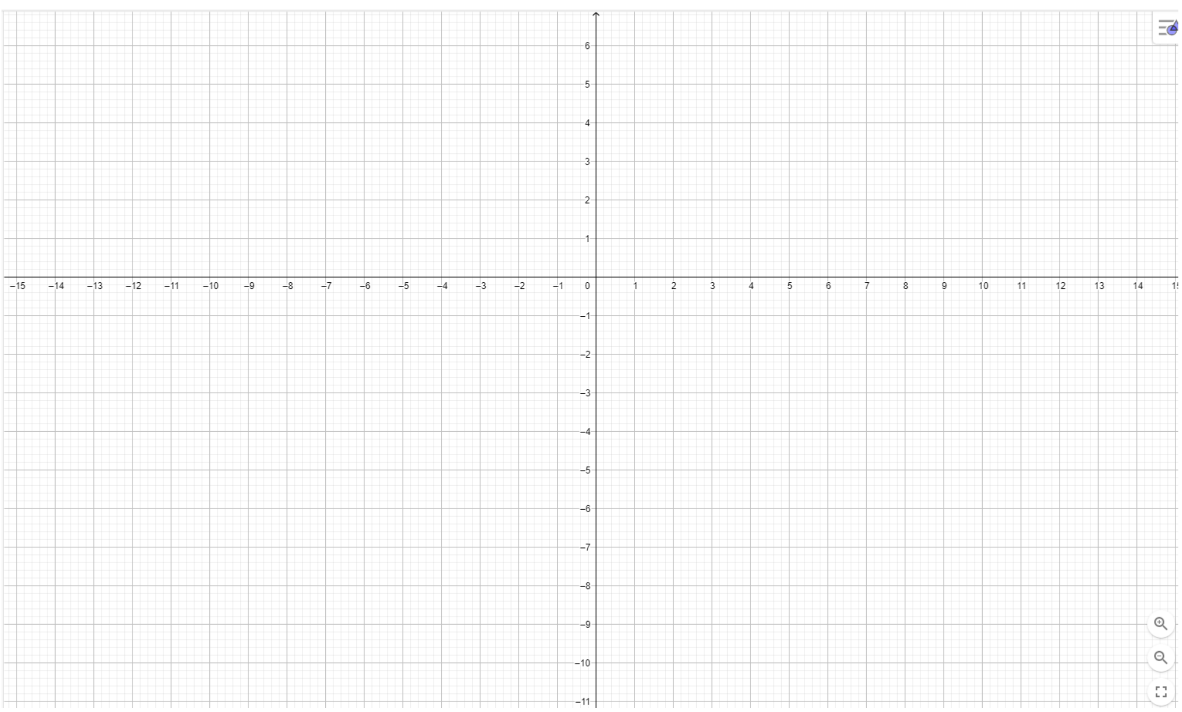
Se determina la concavidad de la parábola por las siguientes condiciones:

- Si $p > 0$ entonces la parábola abre hacia la derecha.
- Si $p < 0$ entonces la parábola abre hacia la izquierda.

Parábola que abre hacia:

Determina:

- El foco está determinado por: Foco: F(p, 0) F(, 0)
- La directriz por: Directriz: x = $-p \rightarrow x =$
- El lado recto por: $LR = |4p|$ $LR = |4 \quad| =$
- Eje: $y =$



Ecuación de la parábola con vértice en el punto (h, k)

Dadas las ecuaciones de las parábolas, determina sus elementos: vértice, foco, directriz, eje y lado recto.

1. $y^2 - 10y - 12x + 37 = 0$

El término cuadrático es y, por lo tanto, la parábola es horizontal.

Primero se agrupan los términos con y en el primer miembro de la igualdad.

$$y^2 - 10y = 12x - 37$$

Se completa el cuadrado perfecto en el primer miembro y se suma el mismo valor en ambos lados y se simplifica.

$$y^2 - 10y + \qquad = 12x - 37 +$$

Se factoriza la expresión:

La ecuación que se obtiene es de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ que representa a una parábola por consiguiente, el vértice es el punto:

$$V(h, k)$$

Se determina el valor de p

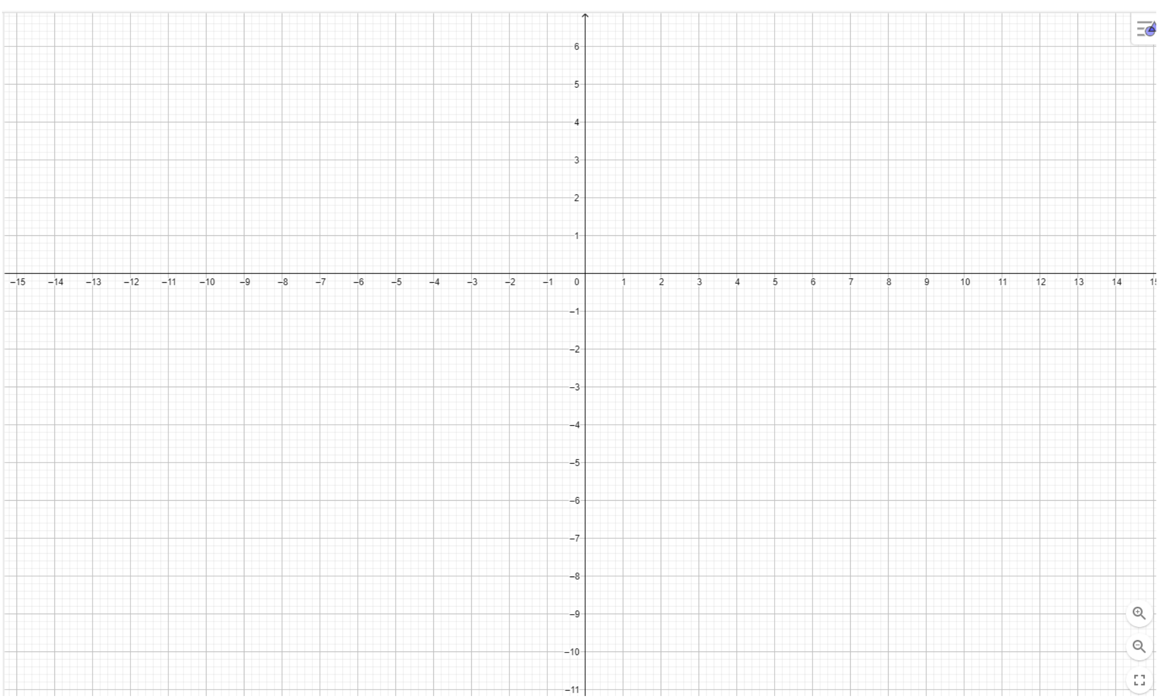
Se sustituyen en los elementos de la parábola horizontal de acuerdo:

Foco: $F(h + p, k) =$

Directriz: $x = h - p =$

Lado recto: $LR = |4p|$

Ecuación del eje: $y =$



Problemario

Si deseas seguir practicando, puedes resolver los siguientes ejercicios.

1. $x^2 = 12y$
2. $x^2 - 12x + 16y + 68 = 0$
3. El diámetro de una antena parabólica es de 2 m y su profundidad es de 40 cm ¿a qué altura se debe colocar el receptor?

Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Identifico la concavidad de la parábola.		
Puedo localizar el foco de la parábola.		
Consigo encontrar el vértice de la parábola.		
Logro identificar ¿a qué tipo de parábola pertenece?		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Matemáticas profe Julio parábola encontrando elementos de la parábola, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=2pvke2ELR3M
- Matemáticas profe Alex graficar la parábola conociendo la ecuación general, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=MX9jnNp8DKA

Referencias

- Colegio Nacional de Matemáticas,2009. Matemáticas aplicadas segunda edición. PEARSON EDUCACIÓN
- Silva Juan Manuel, 2000, Fundamentos de matemáticas, Limusa Noriega Editores, México.

Imágenes tomadas de:

- https://www.geogebra.org/classic?lang=es

Lección 12. Hipérbola

Explorando

Responde a las siguientes preguntas y elige la que consideres que es la correcta.

¿Cuál de las siguientes funciones representa una ecuación de hipérbola?

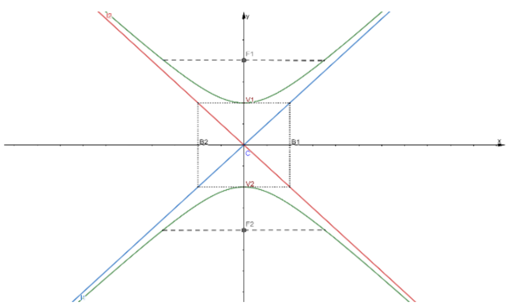
a. $y = 8x + 3$
b. $y = e^x + 3$
c. $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
d. $y = x^2 - 4$

¿Cuáles son los componentes que tiene una hipérbola?

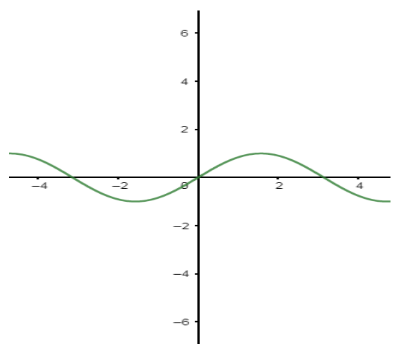
a. No tiene lados
b. Ángulo axial, simétrica y tangencial.
c. Dos focos, dos vértices, dos lados rectos.
d. Un radio y un cuadrado

¿Cuál de las siguientes figuras corresponde a una hipérbola?

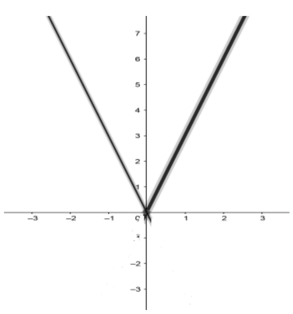
a)



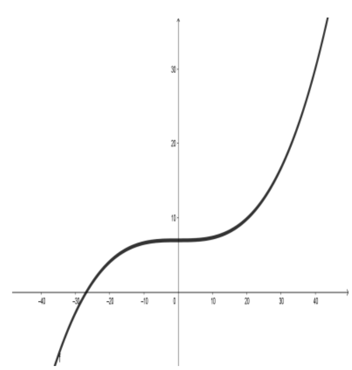
b)



c)



d)



Comprendiendo

¿Que son las hipérbolas?

Es el lugar geométrico que describe un punto en el plano que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre constante.

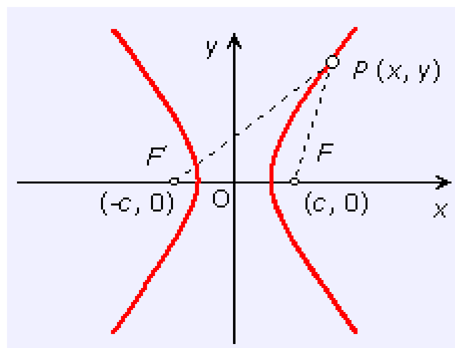
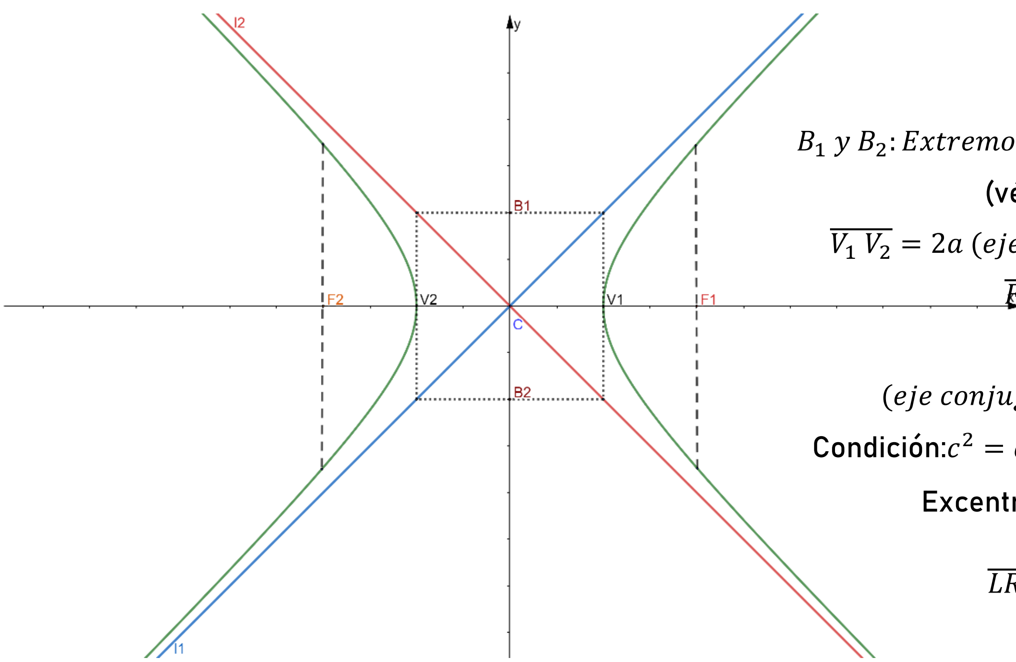


Imagen tomadas de: http://www.matematicasdigitales.com/la-hiperbola/ .

En la siguiente figura te describimos cuáles son sus elementos:



C: centro

$V_1 \; y \; V_2 : Vértice$

$F_1 \; y \; F_2 : Focos$

$B_1 \; y \; B_2 : Extremos \; del \; eje \; conjugado$

(vértices imaginarios)

$\overline{V_1 \, V_2} = 2a \; (eje \; transverso \; o \; real)$

$\overline{F_1 F_2} = 2c (eje \; focal)$

$\overline{B_1 B_2} = 2b$

$(eje \; conjugado \; o \; imaginario)$

Condición: $c^2 = a^2 + b^2 ; c > b, c > a$

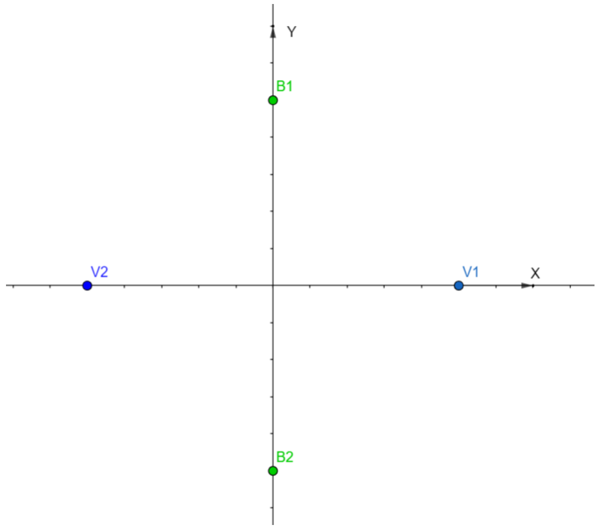
Excentricidad: $e = \frac{c}{a} (e > 1)$

$$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} (lado \; recto)$$

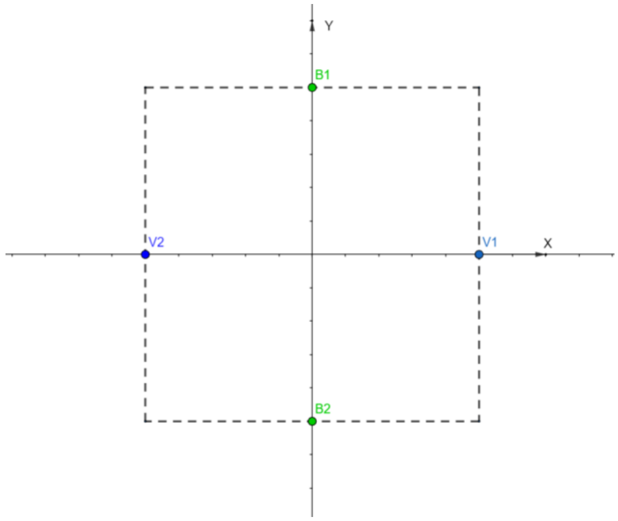
$l_1 \; y \; l_2 : Asíntotas$

Ejemplo de cómo se gráfica una asíntota

Ubiquemos los vértices sobre el eje *X* las siguientes coordenadas (5,0) y (-5,0), donde el 5 representa cinco unidades ubicadas en el eje *X* y el 0 las unidades que representa en el eje *Y*, que son los vértices simétricos como se señala en el plano cartesiano V_1(5,0),V_2(-5,0), y los puntos de coordenadas B_1(0,5), B_2(0,-5) que llamaremos "vértices imaginarios" (no son puntos de la hipérbola, habíamos visto que ésta no corta al eje *y*).



Para trazar las asíntotas armemos un rectángulo auxiliar que ayudará a graficar la hipérbola, y luego tracemos las rectas que contienen a sus diagonales (esas rectas serán las asíntotas). Una vez trazadas las asíntotas, es sencillo realizar un gráfico aproximado de la hipérbola.



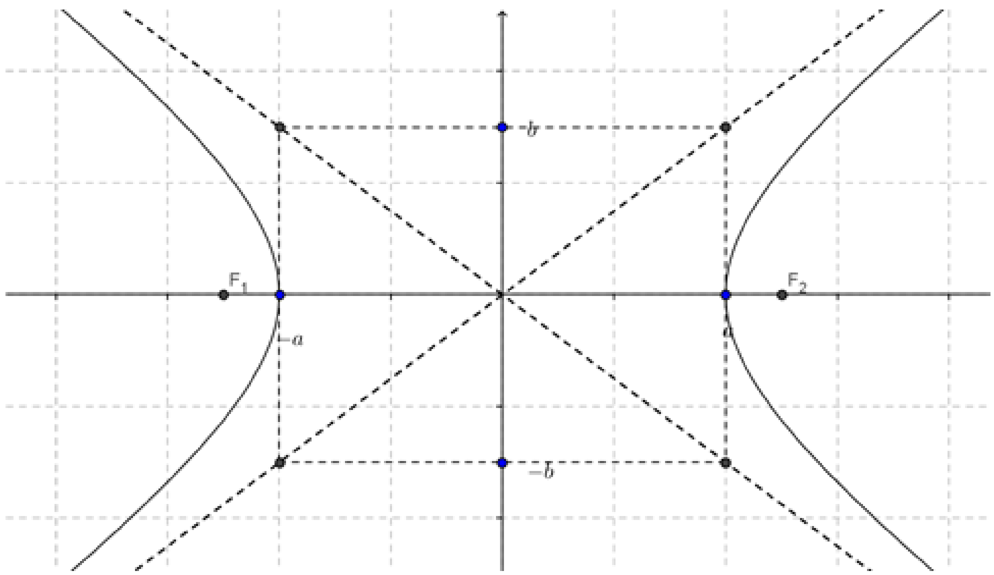
Después de encontrar los vértices simétricos y los imaginarios, ahora trazaremos las pendientes de las diagonales.

Habíamos visto que las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Esto justifica porque las asíntotas son las rectas que contienen a las diagonales del rectángulo.

Los focos, como los vértices de la hipérbola, están sobre el eje x. Como $c > a$, los focos están más alejados del origen que los vértices ($c^2 = a^2 + b^2$).



Si en la ecuación canónica anterior permutamos x por y queda:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Es la **ecuación canónica de la hipérbola con centro en** (0,0)(0,0) **y eje focal** x=0 eje y.

Ejemplo: Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de sus distancias a los puntos fijos (5,0) y (-5,0), es siempre igual a 8 unidades.

En este ejemplo en particular es una asíntota horizontal, ya que los datos que nos brinda el problema aparecen en el punto focal que se encuentran en el eje X y eje $-X$ en la graduación 5 y -5 de dicho eje, mientras que en el eje de las Y la coordenada es 0, es por esta razón que podemos anticipar que la asíntota será horizontal.

Como no tenemos una ecuación, ya que el problema es lo que nos requiere, vamos a utilizar la fórmula: ($c^2 = a^2 + b^2$)

Simplificando la ecuación

$$(c = \sqrt{a^2 + b^2})$$

Dónde $a = al\ punto\ de\ las\ coordenadas\ en\ el\ eje\ positivo\ x = 5\ y\ en\ el\ eje\ negativo - x = -5$ como lo anuncia el problema, en el eje de la $y = 0$, con la fórmula anterior obtendremos la distancia del punto $p(x, y)$ al punto focal llamado F_1

Solución

Se obtienen las distancias del punto P(x,y) a los puntos fijos (focos),

$$\overline{\boldsymbol{PF_1}} = \sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{5})^2 + \boldsymbol{y}^2}\ \ \textbf{y}\ \ \ \overline{\boldsymbol{PF_2}} = \sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{5})^2 + \boldsymbol{y}^2}$$

Y se aplica la definición de la hipérbola.

$$\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{5})^2 + \boldsymbol{y}^2} - \sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{5})^2 + \boldsymbol{y}^2} = 8$$

Se despeja un radical y se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{5})^2 + \boldsymbol{y}^2} = 8 + \sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{5})^2 + \boldsymbol{y}^2}$$

$$\left(\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{5})^2 + \boldsymbol{y}^2}\right)^{\boldsymbol{2}} = \left(8 + \sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{5})^2 + \boldsymbol{y}^2}\right)^{\boldsymbol{2}}$$

Al desarrollarse se determina que:

$$(x-5)^2 + y^2 = 64 + 16\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + (x+5)^2 + y^2$$

$$-4\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 16$$

Ahora al elevar ambos miembros al cuadrado resulta que,

$$\left(-4\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2 = (5x+16)^2$$

$$16(x^2 + y^2 + 10x + 25) = 25x^2 + 160x + 256$$

Finalmente, se simplifica:

$$16x^2 + 16y^2 + 160x + 400 = 25x^2 + 160x + 256$$

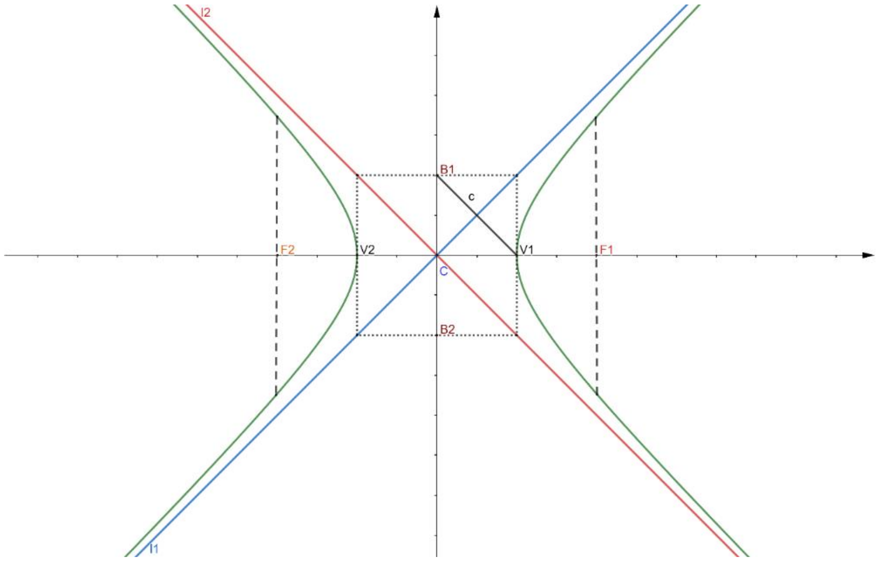
$$16y^2 + 160x - 160x + 400 - 256 = 25x^2 - 16x^2$$

$$16y^2 + 144 = 9x^2$$

Se obtiene el resultado de la ecuación igualando a 0: $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

Ecuación de una hipérbola con vértice en el origen

En la figura:



Distancia del centro a los vértices 1 y 2

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$

Distancia del centro a los vértices imaginarios1 y 2

$\overline{CB_1} = \overline{CB_2} = b$

Distancia del centro a los focos 1 y 2

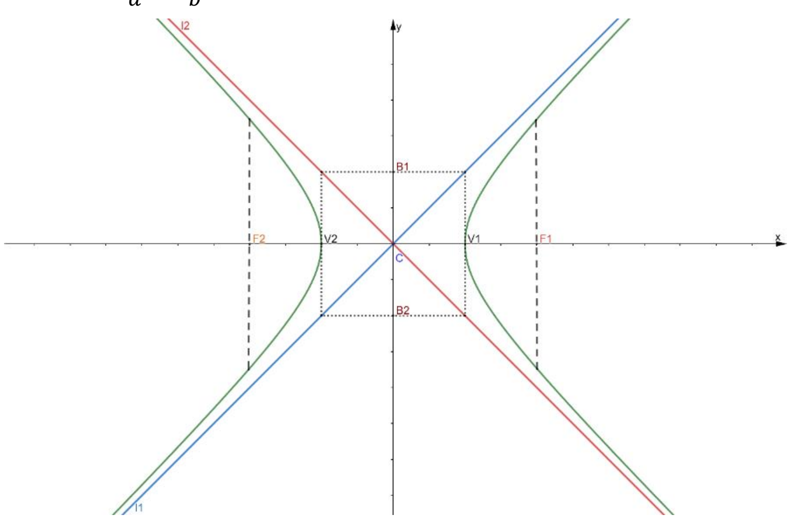
$\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = c$

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a, entonces\ ,\overline{V_1V_2} = 2a\ al\ ser\ V_1\ un\ punto\ de$

la hipérbola se tiene que:$\overline{V_2F_2} - \overline{V_1F_1} = 2a$, por tanto, la diferencia de las distancias de cualquier punto de la hipérbola a los 2 puntos fijos (focos) es igual a 2a.

En las hipérbolas con punto en el origen existen de dos tipos, las hipérbolas horizontales y verticales, que viene dadas con las siguientes ecuaciones que nos ayudan a diferenciar una de otra con respecto a su forma y fórmula.

Gráfica de una hipérbola horizontal con centro en el origen está dada con la siguiente ecuación:$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Elementos

Vértices: $V(\pm a, 0)$

Focos: F$(\pm c, 0)$

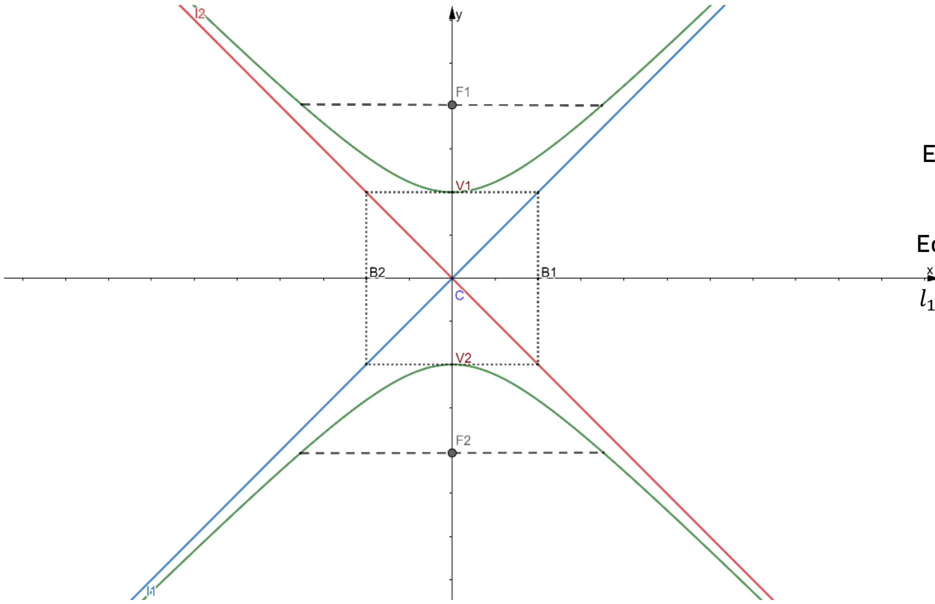
Extremos del eje conjugado:

B$(0, \pm b)$

Ecuaciones de las asíntotas:

$l_1: y = \frac{b}{a}x \qquad l_2: y = -\frac{b}{a}x$

Gráfica de una hipérbola vertical con centro en el origen está dada con la siguiente ecuación:$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$



Elementos

Vértices: $V(0,\pm a)$

Focos: F$(0,\pm c)$

Extremos del eje conjugado

: B$(\pm b,0)$

Ecuaciones de las asíntotas:

$l_1: y=\frac{a}{b}x \qquad l_2: y=-\frac{a}{b}x$

Para hipérbolas horizontales y verticales se tiene que:

Condición: $c^2=a^2+b^2; c>b, c>a, exentricidad: e=\frac{c}{a}(e>1), lado\ recto: \overline{LR}=\frac{2b^2}{a}$

Eje transverso: $2a, eje\ conjugado: 2b, eje\ focal: 2c$

Ejemplo:

Determina los elementos y traza la gráfica de la hipérbola, cuya ecuación es:

$$9x^2-4y^2-36=0$$

Solución

Se transforma la ecuación a la forma cónica:

$$9x^2-4y^2=36$$

Se divide entre el termino independiente y se simplifica:

$$9x^2-4y^2=36$$

$$\frac{9x^2}{36}-\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\ Ecuación\ en\ su\ forma\ cónica.$$

De acuerdo con los datos en la que resultó la ecuación y de acuerdo con el orden de la ecuación de la cónica, esta representa una hipérbola horizontal de la forma:

$$:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

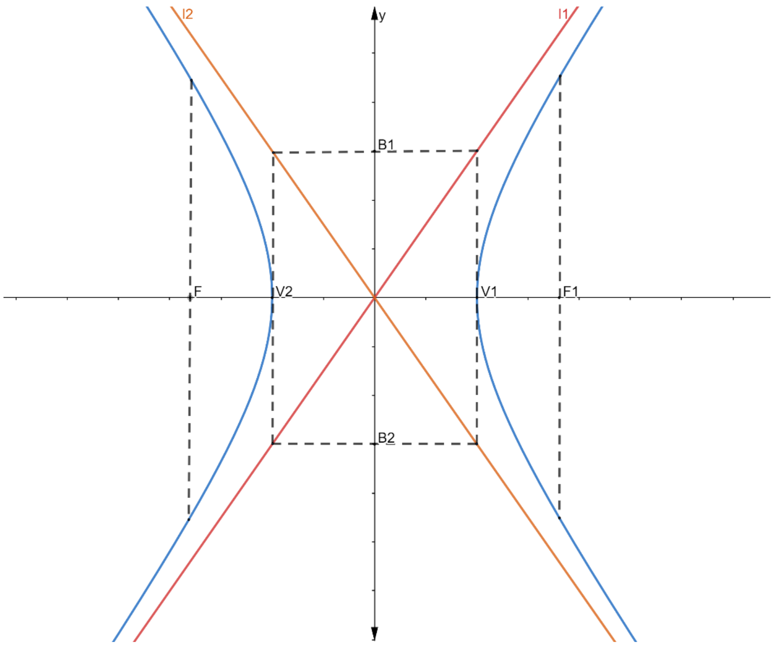
De la cual se obtiene un semieje transverso *a* y el semieje conjugado *b*:

$$a^2=4\ \rightarrow a=2\ y\ b^2=9\ \rightarrow b=3$$

Se aplica la condición para encontrar el valor de *c* (distancia del centro al foco):

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

Al sustituir: *a* = 2, *b* = 3 y *c* =$\sqrt{13}$, se obtiene:



Vértices: $V(\pm a,0)=V(\pm 2{,}0)$

Focos: F$(\pm c,0)=F\left(\pm\sqrt{13},0\right)$

Extremos del eje conjugado

: B$(0,\pm b)=B(0,\pm 3)$

asíntotas:

$$l_1\colon y=\frac{a}{b}x=\frac{3}{2}x\to 3x-2y=0$$

$$l_2\colon y=-\frac{a}{b}x=-\frac{3}{2}x\to 3x+2y=0$$

Lado recto:$\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(3)^2}{2}=\frac{18}{2}=9$

Eje transverso:$\overline{V_1V_2}=2a=2(2)=4$

Eje focal: $\overline{F_1F_2}=2c=2\sqrt{13}$

Eje conjugado:$\overline{B_1B_2}=2b=2(3)=6$

Excentricidad:$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

Ecuación de la hipérbola con vértice en el punto (h, k), significa que está fuera del origen.

La hipérbola horizontal con centro fuera del origen en el punto (h,p), se hace una traslación de los ejes *XY* al punto C(h,k).

Sean $x'=x-h, y'=y-x$, la ecuación de la hipérbola en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Al sustituir x', y' en la ecuación se obtiene:

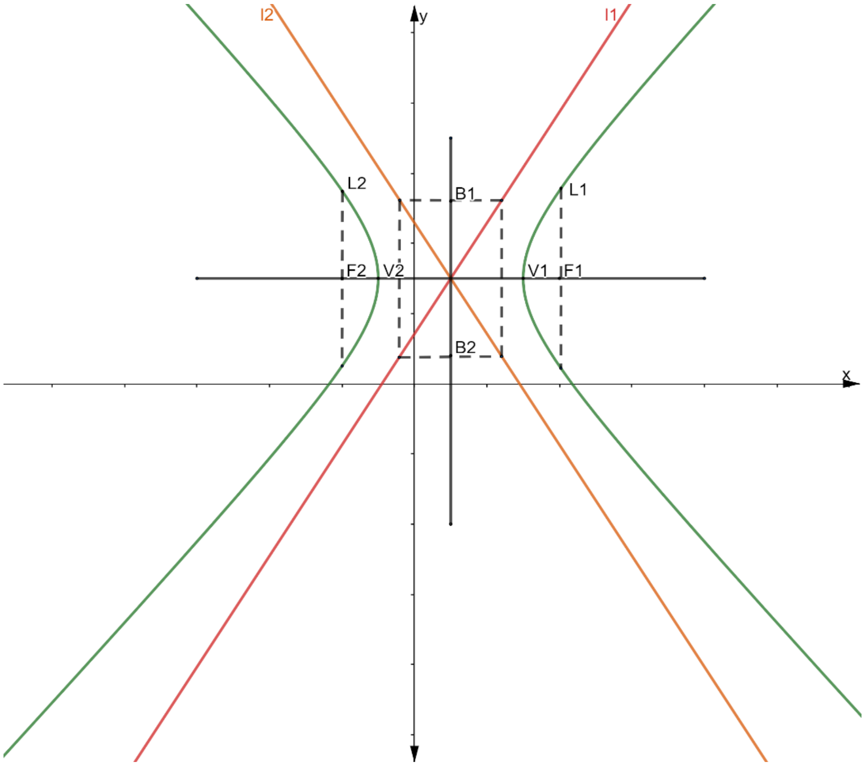
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Del mismo modo se obtiene la ecuación de una hipérbola vertical con centro en (h,k) fuera del origen:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Al simplificar se obtendrá una ecuación de la forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde A y C varían en signo.

Elementos y ecuación para una gráfica de la hipérbola horizontal.



Ecuación Ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértice: $V(h \pm a, k)$

Focos:$F(h \pm c, k)$

Extremo del eje conjugado:

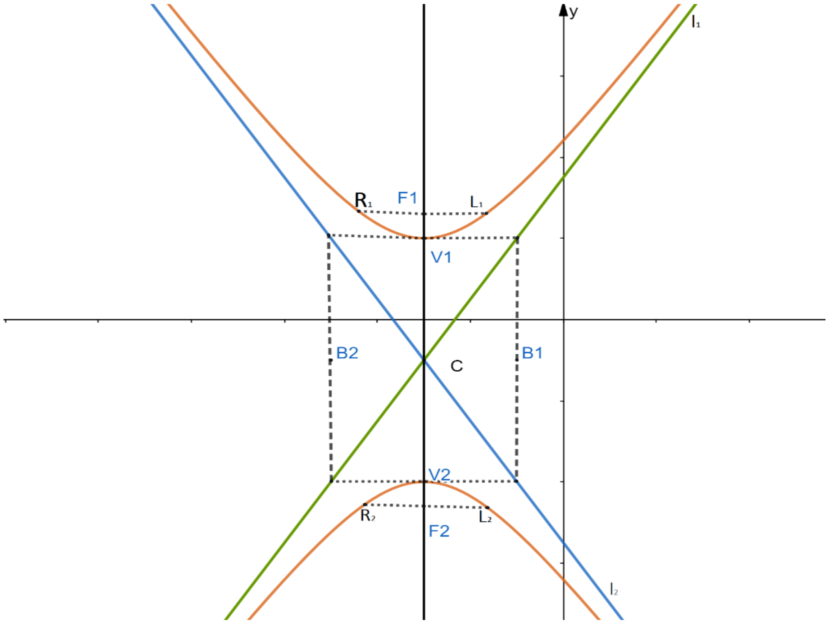
$B(h, k \pm b)$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$l_1: y-k=\frac{b}{a}(x-h)$$

$$l_2: y-k=-\frac{b}{a}(x-h)$$

Hipérbola vertical



Elementos y ecuación para una gráfica de la hipérbola horizontal.

Ecuación Ordinaria

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértice: $V(h, k \pm a)$

Focos:$F(h, k \pm c)$

Extremo del eje conjugado:

$B(h \pm b, k)$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$l_1: y-k=\frac{a}{b}(x-h)$$

$$l_2: y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$$

Para hipérbolas horizontales y verticales se tiene que:

Condición:$c^2 = a^2 + b^2; c > b, c > a, exentricidad: e = \frac{c}{a} (e > 1), lado\ recto: \overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$

Ecuación general de la hipérbola:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Con A y C de signo contrario.

Ejemplo

Determina los elementos de la hipérbola con ecuación es: $4y^2 - 9x^2 + 8y - 54x - 113 = 0$

Solución

$$4y^2 - 9x^2 + 8y - 54x = 113$$

Se factoriza los coeficientes de los términos cuadráticos.

$$4(y^2 + 2y) - 9(x^2 - 6x) = 113$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$$4(y^2 + 2y + (1)^2) - 9(x^2 - 6x + (3)^2) = 113 + 4(1)^2 - 9(3)^2$$

Se resuelve la ecuación.

$$4(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 - 6x + 9) = 113 + 4 - 81$$

Se factoriza la ecuación.

$$4(y + 1)^2 - 9(x + 3)^2 = 36$$

Se dividen ambos miembros entre 36 para obtener la ecuación en su forma ordinaria.

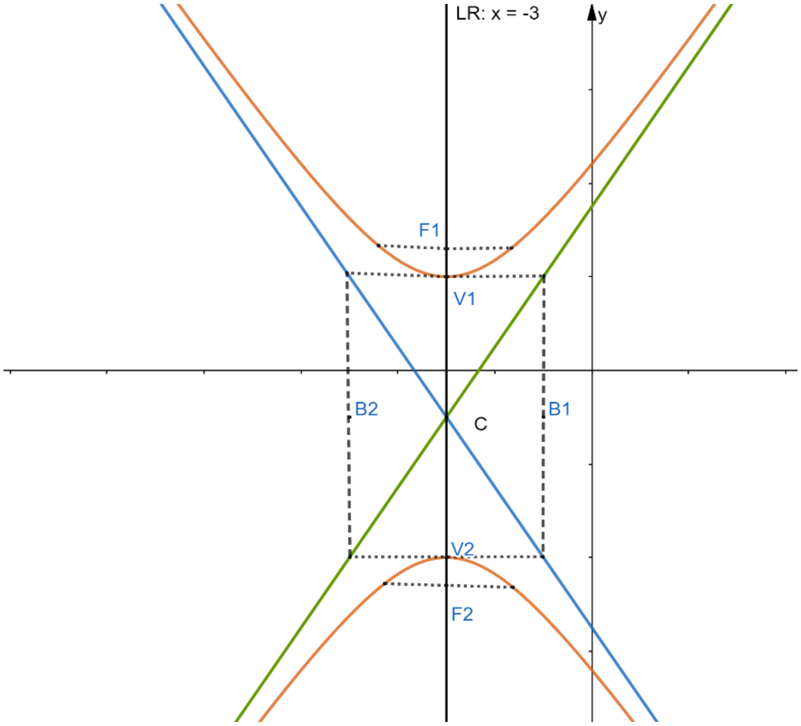
$$\frac{4(y + 1)^2}{36} - \frac{9(x + 3)^2}{36} = \frac{36}{36}, \frac{(y + 1)^2}{9} - \frac{(x + 3)^2}{4} = 1$$

Es una hipérbola vertical de elementos:

$$\text{centro}(-3, -1); a = \sqrt{9} = 3\ y\ b = \sqrt{4} = 2$$

El valor de c es:$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Los elementos se obtienen al sustituir:



Vértices: $V(h, k \pm a)$

$V_1(-3,-1+3) = (-3,2)$

$V_2(-3,-1-3) = (-3,-4)$

Focos: $F(h, k \pm c)$

$F_1\left(-3,-1+\sqrt{13}\right) = (-3,2.6)$

$F_2\left(-3,-1-\sqrt{13}\right) = (-3,-4.6)$

Extremos en el eje conjugado: $B(h \pm b, k)$

$B_1(-3+2,-1) = (-1,-1)$

$B_2(-3-2,-1) = (-5,-1)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(3) = 6$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{13}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(2) = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Asíntotas $l_1: y - k = \frac{a}{b}(x-h) \rightarrow\ l_1: y+1 = \frac{3}{2}(x+3) \rightarrow 3x - 2y + 7 = 0$

$$l_2: y - k = -\frac{a}{b}(x-h) \rightarrow\ l_2: y+1 = -\frac{3}{2}(x+3) \rightarrow 3x + 2y + 11 = 0$$

Ecuación de una recta tangente a una hipérbola a un punto cualquiera

Se tiene una hipérbola con vértice en el origen y una tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

Horizontal: $\boldsymbol{\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1}$ **Vertical:** $\boldsymbol{\frac{y_0y}{a^2} - \frac{x_0x}{b^2} = 1}$

Si tiene la hipérbola con vértice (h,k) fuera del origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

Horizontal: : $\boldsymbol{\frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2} - \frac{(y_0-k)(y-k)}{b^2} = 1}$ **Vertical:** $\boldsymbol{\frac{(y_0-k)(y-k)}{a^2} - \frac{(x_0-h)(x-h)}{b^2} = 1}$

Ejemplo: Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $7x^2 - 9y^2 - 63 = 0$. En el punto$\left(4, \frac{7}{3}\right)$.

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$7x^2 - 9y^2 - 63 = 0 \ \rightarrow \ 7x^2 - 9y^2 = 63$$

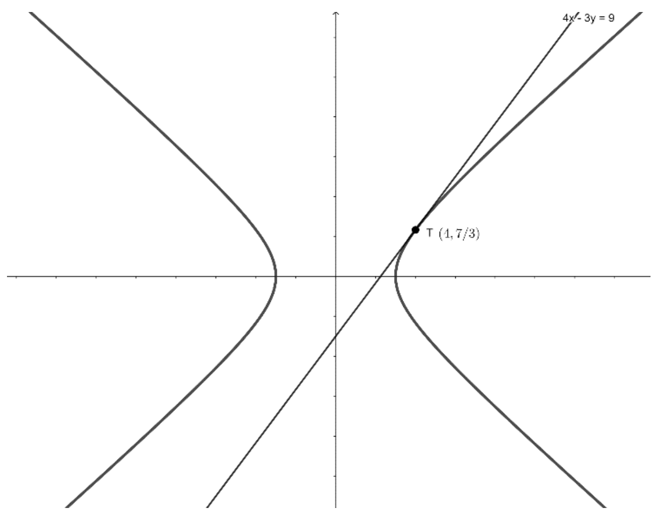
Se dividen los términos entre 63, para identificar el tipo de hipérbola:

$$\frac{7x^2}{63} - \frac{9y^2}{63} = \frac{63}{63}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \ es\ una\ hipérbola\ horizontal$$

Entonces $a^2 = 9, b^2 = 7$, se sustituyen estos valores y el punto es la fórmula: $\boldsymbol{\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1}$

$$\frac{(4)x}{9} - \frac{\left(\frac{7}{3}\right)y}{7} = 1 \ \rightarrow \ \frac{4x}{9} - \frac{7y}{21} - 1 = 0 \ \rightarrow \frac{4x}{9} - \frac{y}{3} - 1 = 0 \ \rightarrow 4x - 3y - 9 = 0$$



Por consiguiente, la ecuación de la recta es $4x - 3y - 9 = 0$

Practicando

Determina los elementos y grafica las siguientes hipérbolas.

Ecuación de la hipérbola con vértice en el origen

1. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$

La ecuación se encuentra en la forma canónica, representando una hipérbola horizontal de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

De la cual se obtiene un semieje transverso *a* y el semieje conjugado *b*:

$$a^2 = \quad \rightarrow a = \quad y\ b^2 = \quad \rightarrow b =$$

radicación a^2 radicación b^2

Se aplica la condición para encontrar el valor de *c* (distancia del centro al foco):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sustituir a^2 y b^2 para encontrar c

$$c = \sqrt{\quad + \quad}$$

$$c = \sqrt{\quad}$$

Al sustituir: *a* = , *b* = y $c = \sqrt{\quad}$ en los elementos de la hipérbola se obtiene:

Vértices: $V(\pm a, 0) = V(\pm \quad, 0)$

Focos: F$(\pm c, 0) = F\left(\pm\sqrt{\quad}, 0\right)$

Extremos del eje conjugado

: B$(0, \pm b) = B(0, \pm \quad)$

asíntotas:

$$l_1 : y = \frac{a}{b}x = \frac{}{}x \rightarrow$$

$$l_2 : y = -\frac{a}{b}x = -\frac{}{}x \rightarrow$$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} =$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a =$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c =$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b =$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Ecuación de la hipérbola con vértice en el punto (h, k)

1. $\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$

Se determina que es una hipérbola horizontal con centro fuera del origen en el punto (h,k).

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Al sustituir x', y' en la ecuación se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

El centro se determina por $\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ Por lo tanto el centro$(-3,4)$

Determinar los valores de $a =$ $b =$

c= es $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Los elementos de la hipérbole se obtienen al sustituir *a* , *b* y *c*, además de *h* y *k*

Elementos

Vértice: $V(h \pm a, k)$

Focos:$F(h \pm c, k)$

Extremo del eje conjugado:

$B(h, k \pm b)$

Ecuaciones de las asíntotas:

$l_1: y - k = \frac{b}{a}(x - h)$

$l_2: y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$

Ecuación de una recta tangente a una hipérbola en un punto cualquiera.

1. Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$, en el punto$\left(-5, -\frac{9}{4}\right)$

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$9x^2 - 16y^2 - 144 = 0 \rightarrow 9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$7x^2 - 9y^2 - 63 = 0 \rightarrow 7x^2 - 9y^2 = 63$$

Se dividen los términos entre 144, para identificar el tipo de hipérbola:

$$\frac{7x^2}{63} - \frac{9y^2}{63} = \frac{63}{63}$$

Obtener resultado de este paso:

Por la ecuación que se obtiene se determina que es una hipérbola horizontal.

Entonces se determinan valores de $a^2 =$, $b^2 =$, se sustituyen estos valores así como los valores en el punto $\left(-5, -\frac{9}{4}\right)$ en la fórmula: $\frac{\boldsymbol{x_0 x}}{\boldsymbol{a^2}} - \frac{\boldsymbol{y_0 y}}{\boldsymbol{b^2}} = \mathbf{1}$

Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver los siguientes ejercicios.

1. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
2. $\frac{y^2}{4} - (x+1)^2 = 1$
3. Obtén la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $25x^2 + 9y^2 + 225 = 0$, en el punto $\left(\frac{9}{5}, -\sqrt{34}\right)$.

Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Identifico la línea recta de la hipérbola.		
Puedo localizar el foco de la hipérbola.		
Consigo encontrar el vértice de la hipérbola.		
Logro identificar a qué tipo de hipérbola pertenece.		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Antes de iniciar con esta nueva aventura de conocimientos sobre hipérbolas te sugiero ver el siguiente video, disponible en: https://youtu.be/YTGXV0LhLRI
- Matemáticas profe Alex Hipérbola trazado y elementos | Introducción, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=Se7nSqmYUJE
- Como resolver una ecuación general de una hipérbola. Hallar sus elementos y su gráfica, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=vZvC0mf0-Sw

Referencias

- Colegio Nacional de Matemáticas,2009. Matemáticas aplicadas segunda edición. PEARSON EDUCACIÓN
- Silva Juan Manuel, 2000, Fundamentos de matemáticas, Limusa Noriega Editores, Mexico.

Imágenes tomadas de:

- Herramientas disponibles para graficar una hipérbola, disponible en: https://www.geogebra.org/classic?lang=es

Lección 13. Elipse

Explorando

Factoriza los siguientes polinomios de acuerdo a la resolución de ecuaciones cuadráticas y anota tu procedimiento.

Apoyo: Recuerda que el factor común del siguiente tipo de polinomios es igual a la multiplicación de dos binomios de la forma **(x+a) (x+b)**, donde: **a** y **b** corresponden a dos números cualesquiera que multiplicados darán como resultado el último término del polinomio, es decir, **ab= 6,** y la suma de **a** y **b** multiplicados por **x** cada uno correspondientemente dará como resultado el segundo término del polinomio, es decir, **ax+bx=7x**

1. $x^2 + 7x + 6$

Apoyo: Para resolver el siguiente tipo de polinomio solamente tienes que separar los términos de **x** y los términos de **y**, para posteriormente factorizarlos con el método llevado a cabo en los ejercicios anteriores, tanto como para los términos de **x** como para los términos de **y**, es decir, dividirás el polinomio a la mitad, 3 términos y 3 términos para factorizarlos y al final unirlos con una suma. Quedando de la siguiente manera: **(x+a) (x+b) +(y+c) (y+d)**, en donde sabemos que **a, b, c** y **d** son números cualesquiera.

2. $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16$

Relaciona los polinomios de la izquierda uniéndolos con su respuesta.

Apoyo: Recuerda que un binomio al cuadrado tiene la forma **(a+b)²**, y este tipo de binomio da como resultado el siguiente producto notable: **a²+ab+b²**, es decir, el cuadrado del primer término, más el doble del producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término. Por lo tanto, podrás utilizar lo antes mencionado, apoyado también en el método para la suma y resta de fracciones, y resolver el ejercicio.

1. $(x-6)^2$	( ) $3x^2 + 2y^2 - 6 = 0$
2. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$	( ) $5x^2 - 3y^2 - 10x - 12y - 22 = 0$
3. $\frac{(x+1)^2}{3} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$	( ) $x^2 - 12x + 36$
4. $(x+2)^2$	( ) $x^2 + 4x + 4$

Comprendiendo

¿Qué es la elipse?

La elipse, como se muestra en la **Figura 1** es el lugar geométrico de un punto ***P*** que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de dicho plano es siempre igual a una constante **2*a***, mayor que la distancia entre los dos puntos.

Los dos puntos fijos se denominan **focos** (F_1 *y* F_2) de la elipse.

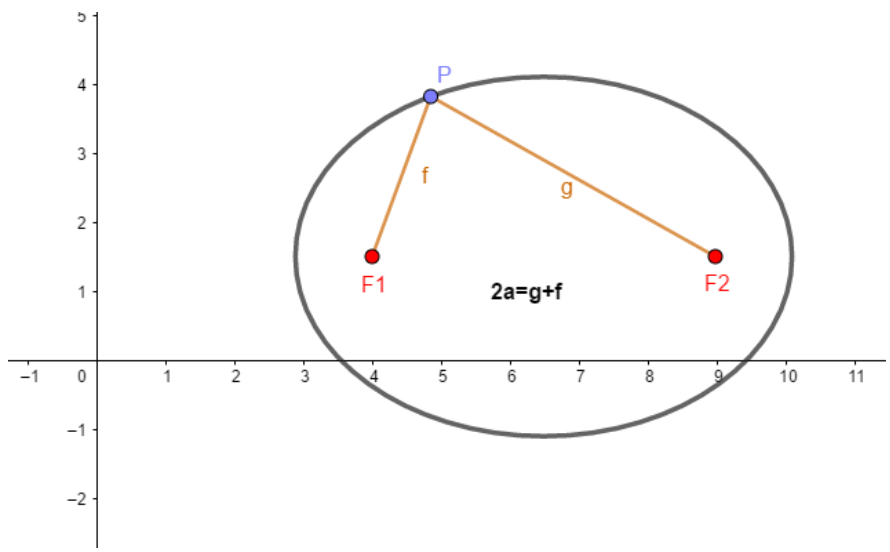


Figura 1. *Descripción de la elipse.*

Elementos de la elipse.

Los elementos de la elipse son imprescindibles para solucionar problemas de aplicación y también son útiles al demostrar la ecuación de la elipse, por ello es importante poder identificarlos.

A continuación, los definimos y los ubicamos en la **Figura 2**:

Focos. Dos puntos fijos en el plano, tales que la suma de las distancias a cualquier otro punto de la elipse es constante, *F1 y F2*.

Eje focal. Es la recta que pasa por los focos.

Eje mayor. Cuerda mayor de la elipse que, además, pasa por los focos, es decir el segmento comprendido entre los puntos *V y V'*.

Eje menor. Es el segmento de recta que pasa por el centro de la elipse, y es perpendicular al eje focal. Segmento comprendido entre los puntos *B y B'*.

Centro. Punto de intersección entre el eje mayor y el menor ***C.***

Lado recto. Cuerda que es perpendicular al eje mayor y pasa por uno de sus focos. Y cuyos puntos extremos están sobre la elipse ***(L, R, L' y R')***.

Convértices. Puntos de la elipse que delimitan el eje menor ***(B y B').***

Vértices. Puntos de la elipse que delimitan el eje mayor ***(V y V').***

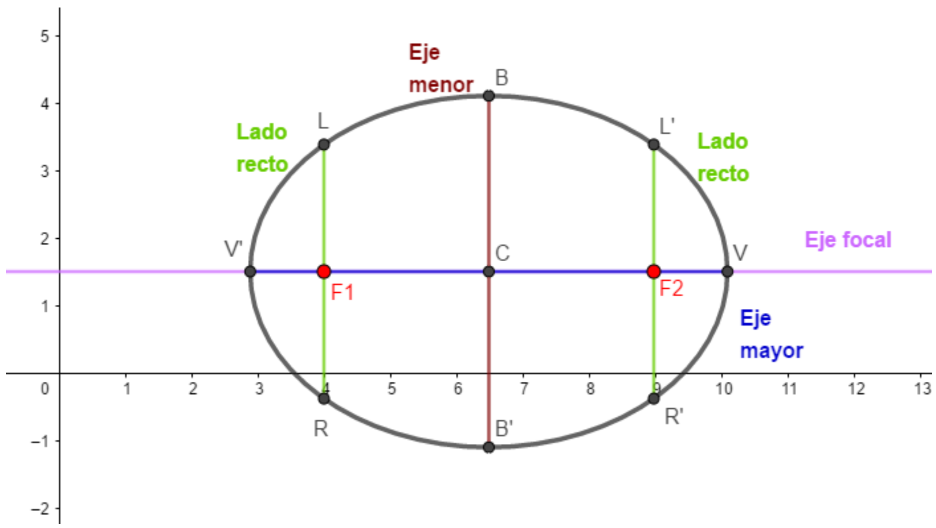


Figura 2. *Elementos de la elipse*

Propiedad reflectora: Cada uno de los segmentos que unen un punto cualquiera de la elipse con sus dos focos, forman ángulos iguales con respecto a la tangente que pasa por dicho punto.

Por lo tanto, si se coloca una fuente de luz o de sonido en uno de los focos de un objeto, cuyas paredes tengan la forma de una elipse, todas las ondas reflejadas pasaran por el otro foco.

Un ejemplo de esta propiedad lo encontramos en el diseño y funcionamiento **litotriptor,** aparato que sirve para eliminar cálculos renales emitiendo ondas sonoras de alta frecuencia en un foco que llegan al cálculo renal, el cual se encuentra ubicado en el otro foco, haciéndolo vibrar y desintegrándolo. **Figura 3.**

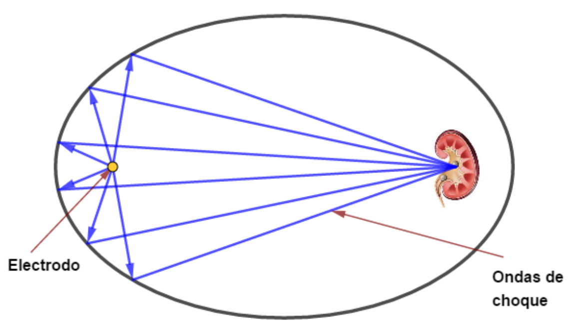


Figura 3. *Principio del funcionamiento de un litotriptor.*

Esta misma propiedad es utilizada para diseñar las **galerias murmurantes,** que son una clase de sala en forma eliptica, en la que una persona puede colocarse en uno de los focos para hablar sin que lo que dice sea escuchado por ninguna otra persona en la sala, a excepcion de aquella persona ubicada en el otro foco como se muestra en la **Figura 4**, este tipo de sala fue utilizada muchas veces como confesionarios durante la guerra cristera.

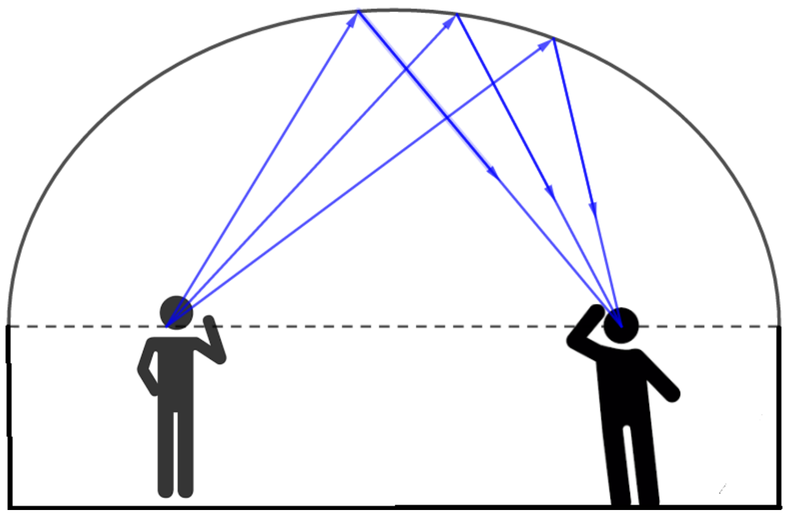


Figura 4. *Principio del funcionamiento de una galería murmurante.*

Ecuación de la elipse con centro en el origen

Consideremos una elipse como la que se muestra en la **Figura 5**, cuyo eje focal esta sobre el eje de las abscisas y su centro está en el origen, además, los focos se encuentran a una distancia ***c*** del centro, de esta forma los focos están en las coordenadas F1(-c,0) y F2(c,0). Siendo ***a***, la distancia entre el foco y un vértice sobre el eje menor, y ***b*** la distancia entre el centro y dicho vértice.

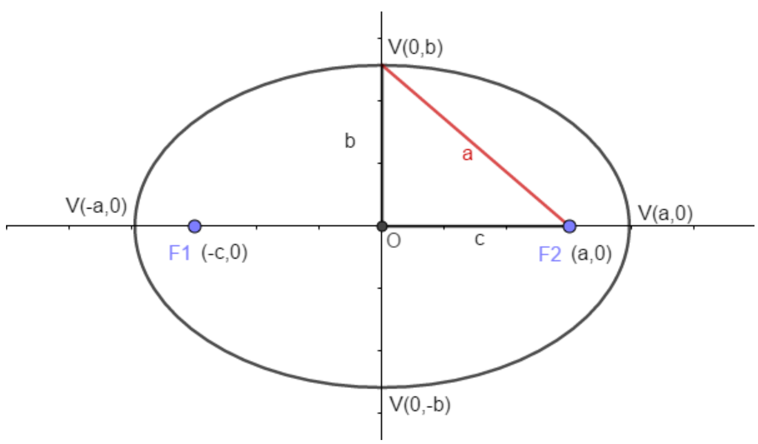


Figura 5. *Elipse ubicada con centro en el origen.*

La ecuación de esta elipse con centro en el origen quedaría de la siguiente forma.

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Sin embargo, si el eje focal de la elipse se encuentra sobre el eje de las ordenadas, de esta forma los focos estarían en las coordenadas F1(0,-c) y F2(0, c), y su ecuación se reinscribiría de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

Ejemplo

Una pista de carrera tiene una forma elíptica y mide 16 km en su eje mayor y su eje menor es de 8 km. Ayuda a un piloto que desea planear la carrera a encontrar la ecuación que describa su trayectoria. El eje focal se encuentra sobre el eje de las abscisas y la pista está centrada en el origen.

Al observar la *figura 5*, podemos darnos cuenta de que el eje mayor será igual a **2a** por lo tanto:

$2a=16$

$a=\frac{16}{2}=8$

Y el eje menor es igual a **2b**, en ese caso:

$2b=8$

$b=\frac{8}{2}=4$

Entonces sustituyendo los valores de a y b, en la ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal en las ordenadas:

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Obtenemos:

$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$

$\boldsymbol{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1}$

La cual sería la ecuación que describe la trayectoria de la pista.

Ecuación de la elipse con centro fuera del origen

Consideremos una elipse como se muestra en la **Figura 6**, cuyo centro está en las coordenadas (h, k).

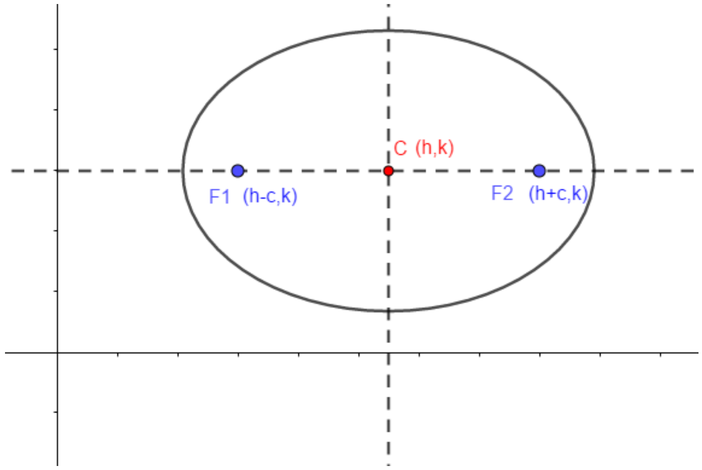


Figura 6. *Elipse con centro ubicado fuera del origen*

Entonces las nuevas coordenadas del origen serán:

x' = x-h

y' = y –k

En donde *x'*y'son los nuevos ejes coordenados, de esta manera podemos hace uso de la ecuación de la elipse con centro en el origen, obteniendo las nuevas ecuaciones llamadas **ecuación de la elipse con centro en (h, k).**

Con eje focal paralelo al aje de las abscisas:

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{b}^2}=\mathbf{1}$$

Con eje focal paralelo al eje de las ordenadas:

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{b}^2}+\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{a}^2}=\mathbf{1}$$

Ejemplo

En el tema anterior te presentamos un ejemplo en el cual se ayuda a un piloto de carreras a encontrar la ecuación de la elipse, ¿pero qué pasaría si la pista ahora la desplazaran por alguna razón y ahora se encontrara en el punto C (7,3)? ¿la ecuación que describe su trayectoria sería la misma? La respuesta seria que no, pero no necesariamente se tendrían que elaborar nuevos cálculos, ya que sabemos que la ecuación de la elipse centrada fuera del origen con eje focal paralelo al eje de las ordenadas es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Para este ejemplo las coordenadas del centro (7,3) = (h, k), por lo que solo hay que sustituirlas en la ecuación, quedando de la siguiente forma:

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{7})^{2}}{\mathbf{16}}+\frac{(\boldsymbol{y}-\mathbf{3})^{2}}{\mathbf{64}}=\mathbf{1}$$

Esta pasaría a ser la nueva ecuación de la pista de carreras.

Ecuación general de la elipse

Desarrollando la ecuación de la elipse con centro en (h, k) y eje focal paralelo al eje de las abscisas:

$$\frac{(x-h)^{2}}{a^{2}}+\frac{(y-k)^{2}}{b^{2}}=1$$

sumamos las fracciones de los polinomios y obtenemos:

Si desarrollamos los binomios tenemos:

$$b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2+a^2y^2-2a^2ky+a^2k^2=a^2b^2$$

Ordenamos los términos:

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$$

Esta ecuación puede reescribirse como una ecuación de segundo grado de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

En donde $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$. Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación general de la elipse.**

Con un análisis similar, desarrollando la ecuación de la elipse con centro en (h, k) y eje focal paralelo al eje de las ordenadas, llegaremos a la misma ecuación solo que esta vez: $A = a^2$, $C = b^2$, $D = -2a^2h$, $E = -2b^2k$ y $F = a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$.

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la pista de carreras que tiene su centro en el origen en su forma general.

Sabemos que la ecuación de la pista de carreras con centro fuera del origen es la siguiente:

$$\frac{(x-7)^{2}}{16}+\frac{(y-3)^{2}}{64}=1$$

Desarrollando los binomios al cuadrado obtenemos

$$\frac{x^2-14x+49}{16}+\frac{y^2-6y+9}{64}=1$$

Si se suman las fracciones se obtiene lo siguiente

$$\frac{64(x^2 - 14x + 49) + 16(y^2 - 6y + 9)}{(16)(64)} = 1$$

$$\frac{64x^2 - 896x + 3136 + 16y^2 - 96y + 144}{1024} = 1$$

Pasamos el denominador del otro lado de la igualdad y posteriormente igualamos a 0

$64x^2 - 896x + 3136 + 16y^2 - 96y + 144 = 1024$

$64x^2 - 896x + 3136 + 16y^2 - 96y + 144 - 1024 = 0$

Ahora agrupamos términos semejantes

$64x^2 + 16y^2 - 896x - 96y + 3136 + 144 - 1024 = 0$

$\mathbf{64x^2 + 16y^2 - 896x - 96y + 2256 = 0}$

Esta última sería la ecuación general de la elipse que describe la trayectoria de la pista de carreras.

Otra forma de resolverlos sería la siguiente:

Sabemos que a=8, b=4, h=7 y k=3 y también conocemos que en la ecuación general de la elipse con eje focal paralelo al eje de las ordenadas A = a^2, C = b^2, D = $-2a^2h$, E = $-2b^2k$ y F = $a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$.

Por lo tanto, sustituyendo los valores de a, b, h y k:

$A = a^2 = 8^2 = 64$

$C = b^2 = 4^2 = 16$

$D = -2a^2h = -2(8^2)(7) = -2(64)(7) = -896$

$E = -2b^2k = -2(4^2)(3) = -2(16)(3) = -96$

$F = a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 = (8^2)(7^2) + (4^2)(3^2) - (8^2)(4^2)$

$F = (64)(49) + (16)(9) - (64)(16) = 3136 + 144 - 1024 = 2256$

Sustituyendo estos valores en la ecuación general de la elipse:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Obtenemos:

$\mathbf{64x^2 + 16y^2 - 896x - 96y + 2256 = 0}$

Practicando

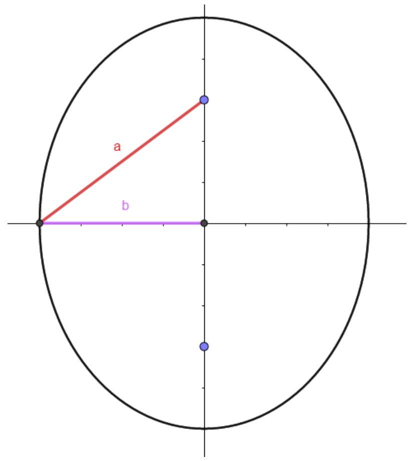
Resuelve los siguientes ejercicios aplicando la ecuación de la elipse.

1. Una estación de radio emite una señal descrita por la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, ¿a qué distancia emite su señal?

   Apoyo:
   Recuerda que la ecuación de la elipse con centro en el origen es igual a: $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$, por lo tanto, puedes apoyarte en la **figura 5** de la sección comprendiendo para encontrar las medidas del eje menor y el eje mayor, las cuales son la máxima distancia alcanzadas por la elipse.

2. Dada la ecuación de la elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ determina:
   a) Las coordenadas de los focos.
   b) Las coordenadas de sus vértices.
   c) La longitud del lado recto.
   d) La longitud del eje mayor.
   e) La longitud del eje menor.
   f) Los puntos de sus covértices.

   Apoyo:
   Recuerda que la ecuación general de la elipse es: $\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$, pero en este ejercicio al tratarse de una elipse con centro en el origen el término **Dx**, y **Ey** se desprecian, quedando nada mas **$Ax^2+Cy^2+F=0$**, en donde **$A=a^2=25$**, **$C=b^2=16$** y **F=400.** Ayudado de esta información, además de la siguiente gráfica y a figura 5 de la sección comprendiendo podrás resolver lo que se te pide.



Problemario

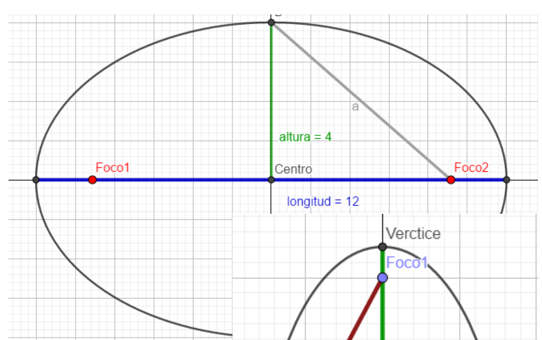
Si deseas seguir practicando, puedes resolver los siguientes ejercicios.

1. Halla la ecuación de la elipse con centro en el origen, eje focal sobre el eje y, longitud de cada lado recto igual a 8 unidades y la del eje mayor igual a 10.

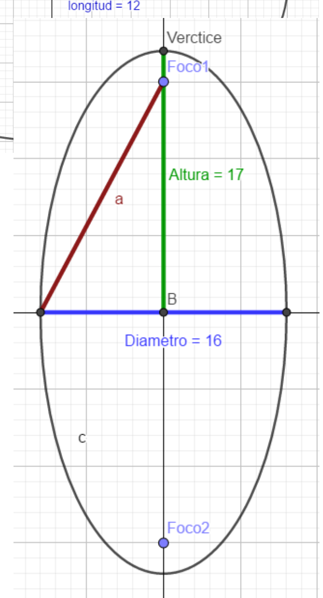
   Apoyo:

   Ten en cuenta que la ecuación de la elipse con centro en el origen es igual a: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \mathbf{1}$**,** que el eje mayor es igual a **2a**, y que el lado recto pasa por el foco y sus puntos finales están sobre la elipse.

2. Se desea diseñar una sala que funcione como galería murmurante de 12 m de longitud y cuya altura del techo elíptico en el centro sea de 4 m. ¿Dónde deben estar situados los focos respecto al centro de la elipse?

   Apoyo:
   Recuerda que la medida del eje mayor es igual a **2a**.
3. Un litrotiptor tiene 17 cm de altura y 16 cm de diámetro. Determina a qué distancia del vértice debe estar situado el foco para que desde ahí se emitan ondas de choque acuáticas de alta energía y a qué distancia del mismo vértice debe ubicarse el cálculo renal que se desea desintegrar.

Autoevaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Reconozco y diferencio a la elipse entre las otras formas cónicas.		
Reconozco los elementos de una elipse.		
Puedo distinguir entre las diferentes ecuaciones de la elipse.		
Puedo encontrar la ecuación de la elipse en sus diferentes formas utilizando solo algunos datos.		
Comprendo problemas sobre la aplicación de la elipse y trasladarlos a un tratamiento algebraico plasmándolo en una ecuación.		
Soy capaz de resolver problemas cotidianos que involucran a la elipse con solo leer la narrativa sin la necesidad de que se me faciliten todos los datos.		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Matemáticas profe Alex, Elipse trazado y elementos, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=P-PhOy9F7Sg
- Matemáticas profe Alex, Gráfica y elementos de la Elipse conociendo la ecuación canónica ejemplo 1, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=ZZtG_9k6UeA
- Matemáticas profe Alex, Gráfica y elementos de la Elipse conociendo la ecuación canónica ejemplo 2, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=Q_9D6uuQgsA
- Matemáticas profe Alex, Gráfica y elementos de la Elipse conociendo su ecuación general ejemplo 1, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=D67zh5lgwf0
- Matemáticas profe Alex, Gráfica y elementos de la Elipse conociendo su ecuación general ejemplo 2, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=pLmd2vbAZ58

Referencias

- Garza, B. (2014). Geometría analítica. Primera edición. Pearson.
- Torres, C. (1999). Geometría analítica. Segunda edición. Santillán.
- Cuellar, J. (2012) Matemáticas III. Tercera edición. Mc Graw Hill.
- Arellano, J. Pérez, C. (2018). Geometría analítica. Primera edición. Gafra editores.

Imágenes tomadas de:

- GeoGebra.

Lección 14. Máximos y mínimos

Explorando

Relaciona ambas columnas con su correspondiente concepto.

a) Valor que es de mayor magnitud respecto a otra.	• Comience a obtener valores más pequeños
b) Cuando un valor máximo en una función se alcanza puede suceder que:	• Mínimo
c) Una función tiene un valor mínimo cuando:	• Máximo
d) Cuando se pasa de un valor positivo a un valor negativo vamos hacia un valor:	• Comienza a obtener valores más grandes

Anota las conclusiones a las que llegas.

Cuando en una función se obtienen valores de menos a más se va hacia un

Quizás te has asombrado ante la inmensidad del cielo lleno de estrellas (valor máximo) y te has maravillado ante lo pequeño de una hormiga (valor mínimo).

Comprendiendo

Máximos y mínimos

Cuando explicamos los conceptos de máximos y mínimos tenemos que retomar la idea de función algebraica, teniendo en cuenta la importancia de conocer el valor óptimo de una función. Esto se puede notar en la aplicación de las funciones matemáticas, físicas o químicas, además de las utilizadas en economía, biología, ecología, etc. y en todo aquello que requiera obtener valores máximos y mínimos, o lo que se conoce como maximizar o minimizar un valor.

Para ello, debemos conocer las fórmulas básicas de derivación y aplicarlas a una función para ubicar el valor máximo y el valor mínimo, ya que en ambos casos lo que se busca es la optimización del resultado más grande o pequeño.

Otros elementos que podemos encontrar con la optimización de una función son:

- Concavidad
- Convexidad
- Punto de inflexión

Optimización de una función

En primer lugar se tiene que analizar los datos a fin de determinar la expresión matemática (función algebraica), cuyos valores máximos y mínimos deseamos determinar. Para ello es conveniente, tener presentes los conceptos de constantes y variables al momento de plantear un modelo matemático, ya que a través de ellos se podrá conocer el comportamiento de nuestros valores y sobre todo la función a maximizar o minimizar.

Recuerda que las reglas básicas de derivación son necesarias para iniciar el estudio de los máximos y mínimos. A continuación se detallan algunas de ellas.

a) $\mathrm{d}(\mathrm{u}+\mathrm{v}-\mathrm{w})$	=	$\mathrm{du}+\mathrm{dv}-\mathrm{dw}$
b) $\mathrm{d}(\mathrm{cu})$	=	$\mathrm{c\ du}$
1) $\mathrm{d}(\mathrm{c})$	=	0
2) $\mathrm{d}(\mathrm{x})$	=	$\mathrm{dx}=1$
3) $\mathrm{d}(\mathrm{uv})$	=	$\mathrm{udv}+\mathrm{vdu}$
4) $\mathrm{d}(u)^n$	=	$\mathrm{nu}^{\mathrm{n}-1}\,\mathrm{du}$
5) $\mathrm{d}(\mathrm{x})^{\mathrm{n}}$	=	$\mathrm{nx}^{\mathrm{n}-1}\,\mathrm{dx}$
6) $\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\right)$	=	$\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}\,v\neq 0$

Para poder calcular un máximo o un mínimo en una función y poder analizar el comportamiento de nuestras variables; si crecen o decrecen en un sentido o en otro de la función, tenemos que establecer un criterio al cual llamaremos ***criterio de la primera derivada para calcular los máximos y mínimos.***

Los pasos para aplicar el criterio de la primera derivada son:

1. Calcular la primera derivada de la función aplicando las reglas de derivación.
2. Esta primera derivada obtenida se iguala a cero con la finalidad de poder hallar lo ceros de la función o lo que es lo mismo encontrar en qué punto toca el eje de las "x" y así verificar en donde sube o baja en la función, es decir; se va hacia un valor mínimo si decrece o se va hacia un valor máximo si crece.

   Por ejemplo, en una función lineal como lo es **x + 2 = 12** podemos igualar a cero, quedando **x +2 -12 = 0**.

   Resolviendo la ecuación:

   $$\mathbf{x - 10 = 0}$$
   $$\mathbf{x = 0 + 10}$$
   $$\mathbf{x = 10}$$

   Otro ejemplo sería, **2 y = 6**, igualando a cero, queda **2 y - 6 = 0**

   Resolviendo la ecuación:

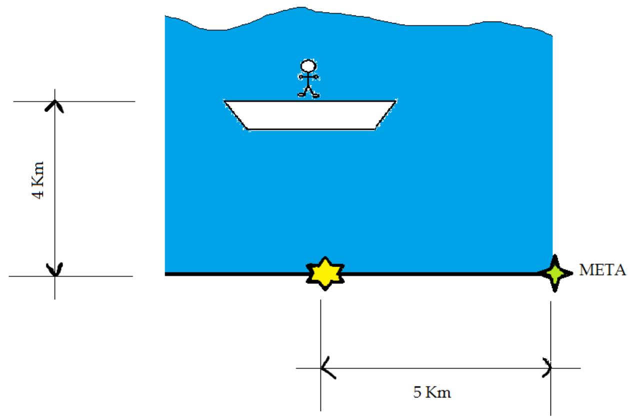
   $$\mathbf{2\,y = 0 + 6}$$
   $$\mathbf{2\,y = 6}$$
   $$\mathbf{y = 6/2}$$
   $$\mathbf{y = 3}$$

   En ambos ejemplos a los puntos así obtenidos se les conoce como **puntos críticos de la variable.**
3. A estos **valores críticos**, se les realiza un análisis uno por uno, observando los cambios de signo de esta primera derivada. En primer lugar para un valor menor que el valor crítico y después para un valor mayor que el valor crítico, si al sustituir estos valores se obtiene que pasa de un valor positivo primero y luego a un valor negativo, esto indica que la función tiene un máximo, para este valor crítico de la variable; si por el contrario pasa de un valor negativo a positivo se dice que se tiene un mínimo.

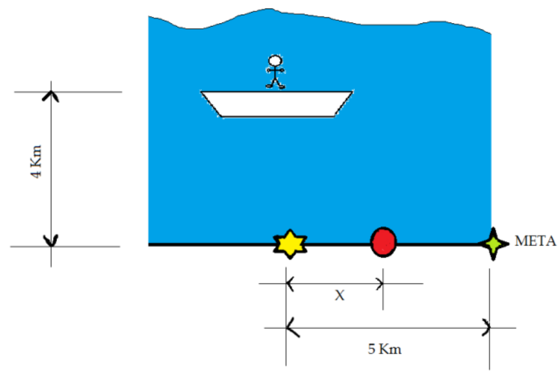
Ejemplo aplicando la ubicación de un mínimo:

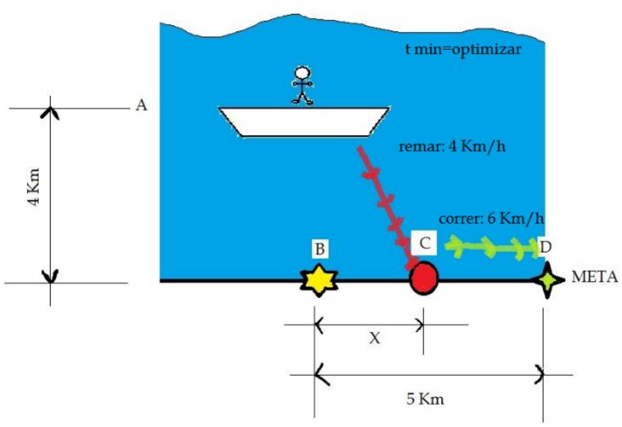
Vamos a hacer la siguiente suposición, que estás participando en una competencia en la cual deberás de hacer dos pruebas, una de remo y complementar con una prueba de atletismo. Los datos que integran la prueba son los siguientes: el punto de partida está situado en el mar a 4 km en línea recta de la playa donde deberás de llegar remando de manera constante a una velocidad de 4 Km/h. Una vez llegando a la playa, deberás de desembarcar y empezar a correr a una velocidad también constante de 6 Km/h a lo largo de esta playa por una distancia de 5 Km, la pregunta es ¿Dónde deberás desembarcar para poder hacer el menor tiempo posible?

Lo primero que podemos hacer es generar un pequeño esquema que nos permita visualizar con mayor detalle los elementos del problema y sobre todo lo que se busca optimizar, en este caso sería el cálculo de mínimo tiempo. Aquí vamos a ver que tenemos que emplear elementos de algebra, geometría y trigonometría, es decir pondremos en juego todos nuestros aprendizajes previos de estas asignaturas.



Si consideramos a **"x"**, el punto donde debes desembarcar, entonces nuestro gráfico quedaría de la siguiente manera:





En esta situación, lo que buscamos hacer es el menor tiempo, lo que se interpreta como un mínimo.

Aquí identificamos dos funciones algebraicas o elementos que dan condiciones a nuestro ejemplo:

- Una función condicionante el tiempo que tardarás en remar y el tiempo que tardarás en correr y lo representaremos de la siguiente manera:

  $\mathbf{t}_{\text{remar}} + \mathbf{t}_{\text{correr}}$, que llamaremos "condicionante 1"

- Una función para optimizar o en este caso para minimizar y que lo representaremos para efectos de simbología matemática de la siguiente manera:

  $\mathbf{f}_{\text{minimizar}}$ ó $\mathbf{f(x)}$ ó $\mathbf{t(x)}$

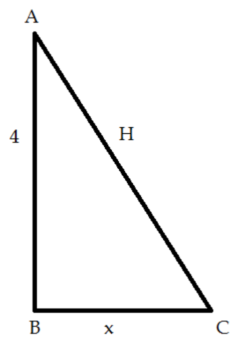
Considerando de acuerdo con la cinemática podemos decir que se trata de un movimiento rectilíneo uniforme por lo que procedemos a usar la ecuación de la velocidad para ir modelando nuestro ejercicio:

$v = \frac{d}{t}$ despejamos el tiempo y nos queda la ecuación $t = \frac{d}{v}$

Ahora nos enfocamos en ubicar a los elementos de la fórmula que serían la distancia y la velocidad de acuerdo con las condiciones del ejemplo para los puntos **A**, **C** y **D**.

Para nuestro tiempo de remar tenemos lo siguiente:

t remar = optimizar por lo que para t_{remar} aplicamos trigonometría básica a través del Teorema de Pitágoras, formando un triángulo imaginario de acuerdo con nuestro dibujo, para poder hallar elementos que nos faltan para poder sustituir en nuestras ecuaciones de cinemática.



De acuerdo con el Teorema de Pitágoras:

$$H^2 = x^2 + 4^2$$

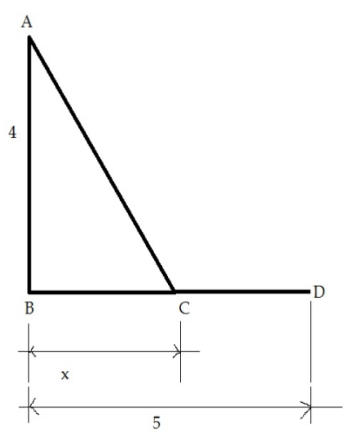
De donde se obtiene el valor de H que es la distancia que buscamos para la optimización o valor mínimo, entonces:

$$H^2 = x^2 + 16$$

$$H = \sqrt{x^2 + 16}$$

Si la velocidad es constante al remar y tiene un valor de 4 Km/h buscaremos sustituir estas condiciones en nuestras ecuaciones para hacer una modelación acorde a nuestra situación en particular:

$$t_{remar} = \frac{d}{v} = \frac{\sqrt{x^2+16}}{4}$$



Ahora buscaremos la optimización para el tiempo de correr, partiendo del análisis parecido de las condiciones anteriores comenzamos:

t_{corre}, busca optimizar en función de la distancia y la velocidad.

De acuerdo con el diagrama la distancia **(d)** buscada se obtiene restando a la distancia total de 5 el valor del punto de desembarque:

d= 5 – x

y considerando que se corre a una velocidad constante tenemos que :

v = 6 Km/h

de acuerdo con la fórmula de cinemática:

$$t_{corre} = \frac{5 - x}{6}$$

Ahora recuperamos nuestra condicionante 1

$$t_{remar} + t_{correr}$$

Entonces sustituimos:

Lo que podemos rescatar hasta este punto es que una función depende de las condiciones y datos que proporciona el ejercicio que tenemos en cuestión.

$$\frac{\sqrt{x^2+16}}{4} + \frac{5-x}{6}$$

Esta es nuestra función f(t) que vamos a optimizar o utilizar para obtener el mínimo.

Ahora lo que sigue es el trabajo algebraico para poder trabajar las ecuaciones resultantes aplicando las reglas básicas para la derivación pues de acuerdo con nuestros **criterios de la primera derivada para calcular los máximos y mínimos,** debemos calcular la primera derivada.

$$f(x)= \frac{\sqrt{x^2+16}}{4} + \frac{5-x}{6}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2+16} + \frac{1}{6}(5-x)$$

Acomodamos los valores de tal manera que podamos aplicar nuestras reglas básico de derivación.

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2+16)^{\frac{1}{2}} \quad + \quad \frac{1}{6}\ (5-x)$$

Aplicaremos esta primera regla

4) $d(u)^n = nu^{n-1}\,du$

Aplicaremos esta primera regla

a) $d(u+v-w) = du+dv-dw$

Donde:

n = 1/2

du = $x^2 + 16$

Nota: todo está en función de la variable "x"

Aplicando la derivación a cada elemento de la condicionante 1.

$$d\,f(x) = d\left[\frac{1}{4} * (x^2+16)^{\frac{1}{2}}\right] \quad + \quad d\left[\frac{1}{6} * (5-x)\right]$$

$f'(x) = \frac{1}{4} * [\frac{1}{2}(x^2+16)^{\frac{1}{2}-1}] * d[x^2+16]$ + $\frac{1}{6}$ *[d(5) - d(x)]

5) $d(x)^n = nx^{n-1}\,dx$ 1) d(c) = 0 2) d(x) = dx=1

$f'(x) = \frac{1}{8} *(x^2+16)^{-1/2} * (2x)$ + $[(\frac{1}{6})(-1)]$

$f'(x) = \frac{2x}{8} *(x^2+16)^{-1/2}$ + $[(\frac{1}{6})(-1)]$

Simplificando obtenemos:

$$f'(x) = \frac{x}{4}*(x^2+16)^{-1/2} - \frac{1}{6}$$

$$f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+16}} - \frac{1}{6}$$

En este paso que sería el segundo para aplicar los ***criterios de la primera derivada para calcular los máximos y mínimos,*** vamos a igualar con cero la derivada calculada:

$f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+16}} - \frac{1}{6} = 0$

$\frac{x}{4\sqrt{x^2+16}} = \frac{1}{6}$

$\frac{x}{4\sqrt{x^2+16}} = \frac{1}{6}$

$x = \frac{1*4\sqrt{x^2+16}}{6}$

$x = \frac{2*\sqrt{x^2+16}}{3}$ Para eliminar el radical elevamos al cuadrado toda la expresión en ambos términos.

$(x)^2 = [\frac{2*\sqrt{x^2+16}}{3}]^2$

$x^2 = \frac{4(x^2+16)}{9}$ multiplicamos a toda la expresión por 9 para eliminar el denominador 9.

$9x^2 = 4x^2 + 64$ Reduciendo los términos semejantes

$9x^2 - 4x^2 = 64$

$5x^2 = 64$

Entonces: $x = \sqrt{\frac{64}{5}}$

que será la distancia mínima buscada, es la distancia a la que debes llegar a desembarcar en la playa para poder lograr el menor tiempo, considerando las velocidades y distancias del ejemplo.

Ahora bien podemos analizar un pequeño ejemplo para hallar el máximo de una función.

La altitud o posición de un cohete está representado por la función

$$\mathbf{h(t) = -2t^2 + 80\,t + 20} \quad \text{y que llamaremos}\ \mathbf{Ec.\ (1)}$$

Siendo la altura **h** medida en metros (m) y el tiempo **t** en segundos (s). Aplicaremos el ***criterio de la primera derivada para calcular los máximos y mínimos,*** mismos que ya aplicamos en el ejemplo anterior y que son los siguientes:

Los pasos para aplicar el criterio de la primera derivada son:

1. Calcular la primera derivada de la función aplicando las reglas de derivación.
2. Esta primera derivada obtenida se iguala a cero con la finalidad de poder hallar lo ceros de la función o también conocidos como **puntos críticos de la variable.**
3. A estos **valores críticos**, se les realiza un análisis uno por uno, observando los cambios de signo de esta primera derivada. En primer lugar para un valor menor que el valor crítico y después para un valor mayor que el valor crítico, si al sustituir estos valores se obtiene que pasa de un valor positivo primero y luego a un valor negativo, esto indica que la función tiene un máximo, para este valor crítico de la variable; si por el contrario pasa de un valor negativo a positivo se dice que se tiene un mínimo.

Una vez recordado esto procedemos a obtener la primera derivada de la función que tenemos como **Ec. 1,** esto de acuerdo con el **criterio número 1.**

$$\mathbf{d[h(t)] = d[-2t^2 + 80\,t + 20]} \quad \mathbf{Ec.\ 1}$$

$$\mathbf{h'(t) = d(-2t^2) + d(80t) + d(20)}$$

$$\mathbf{h'(t) = -2d(t^2) + 80\,d(t) + d(20)}$$

de aquí obtenemos de acuerdo con cada regla de derivación lo siguiente:

$$\mathbf{h'(t) = -2d(t^2) + 80\,d(t) + d(20)}$$

$\boxed{5)\ d(x)^n = nx^{n-1}\,dx}$ $\boxed{2)\ d(x) = dx = 1}$ $\boxed{1)\ d(c) = 0}$

Por lo que ahora nos quedaría de la siguiente manera

$$\mathbf{h'(t) = -2\,(2)(t^{2-1}) + 80(1) + 0}$$

$$\mathbf{h'(t) = -4\,t + 80} \quad \text{y que llamaremos}\ \mathbf{Ec.\ 2}$$

Ahora bien de acuerdo con el **criterio número 2**, procedemos a igualar con cero la **Ec. 2** para obtener los valores críticos de nuestra nueva función.

$\mathbf{h(t) = -4t + 80 = 0}$

$$\mathbf{-4t + 80 = 0}$$

$$\mathbf{-4t = 0 - 80}$$

$$\boldsymbol{t = \frac{-80}{-4} = 20}$$

Lo cual nos indica que el valor crítico de 20 segundos que ahora se usará para obtener el valor máximo buscado.

Ahora de acuerdo con el **Criterio número 3** procedemos a sustituir este valor de **20 s** en la **Ec. 1** para hallar el valor

$$h(t) = -2t^2 + 80\,t + 20 \qquad \text{Ec. 1}$$

$$\text{Para } h(t) = h\,(20) = -\,2\,(20)^2 + 80(20) + 20$$

$$-2(400) + 1600 + 20 = -800 + 1620 = 820$$

Siendo el valor de **820 m** el que representa la altura máxima que alcanzará el cohete antes de comenzar a caer nuevamente a la superficie de la tierra.

Practicando

Determina dos números cuya suma sea 16 de tal manera que su producto sea tan grande como sea posible. Sigue los pasos y desarrolla las ecuaciones correspondientes.

1. Para obtener la ecuación 1: determina la función de la suma considerando que x y y son los dos números por encontrar

2. Para obtener la ecuación 2: determina la función del producto (P) a optimizar

3. Para obtener la ecuación 3: deja en función a una sola variable. Despeja y

4. Para obtener la ecuación 4: sustituye el valor de y en la ecuación 2

5. Para obtener la ecuación 5: deriva el valor de la ecuación 4

6. Iguala la ecuación 5 a cero para obtener la raíz o cero de la función

7. Sustituye el valor de ***x*** en la ecuación 3 para hallar el valor de ***y***

8. Escribe los valores de ***x*** y ***y***

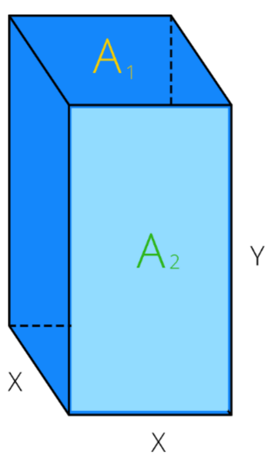
   x=

   y=

Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver el siguiente ejercicio.

Un arquitecto debe construir un tanque con una base cuadrada horizontal y cuyos lados de tipo rectangular y vertical, no se le pondrá tapa y podrá captar una capacidad de $4m^3$ de agua. El material con que se va a construir este tanque tiene un costo de $1500.00 por metro cuadrado ¿Cuáles serían las dimensiones mínimas que podría tener el tanque reducir el costo del material?



A= Área total

A_1= Área de la base

A_2= Área de las caras laterales

Para calcular el área de la base

$$A_1 = x \cdot x = x^2$$

$$A_1 = x^2$$

Para calcular el área de cada lateral

$$Ax^2 = x \cdot y$$

Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Comprendo la diferencia entre un máximo y un mínimo.		
Identifico los elementos que debo recordar en el manejo de los máximos y mínimos.		
Entiendo las aplicaciones de los máximos y mínimos en la optimización de un resultado.		
Soy capaz de determinar la función algebraica en un problema planteado.		
Soy capaz de distinguir las fórmulas de derivación que debo de aplicar para hallar el máximo o mínimo de una función.		
En el caso de que hayas respondido “Tengo dudas” en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Máximos y mínimos de una función, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=ppI4NKTScxw
- Aplicación de la derivada, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=izGTzSy5X10
- Intervalos de crecimiento, puntos máximos y mínimos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión, disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=HoEp1Ypev84

Referencias:

- Leithold, L. (1982), El Cálculo con Geometría Analítica. Cuarta Edición, Editorial Harla
- Purcell, E. (1987), Cálculo con Geometría Analítica. Cuarta Edición, Editorial Prentice Hall.
- Aryes, J. (1987), Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía. Segunda Edición, Editorial Prentice Hall.
- Ortiz, F. (2011), Cálculo Diferencial, Primera Edición, Editorial Grupo Editorial Patria.
- Granville, W. (1989), Cálculo Diferencial e Integral, Primera Edición, Decimosegunda reimpresión. Editorial Noriega Editores.

Imágenes tomadas de:

- https://www.canva.com/

Lección 15. Funciones Trascendentes

Explorando

Relaciona con una línea los conceptos necesarios para el tema de funciones trascendentes.

1. Una expresión algebraica
2. De la siguiente función $y = 2x + 8$, x es:
3. De la siguiente función $y = 2x + 8$, y es:
4. Si $f(x) = x^2 + 10x - 4$ representa
5. El valor de $\log_2 8$ es:
6. El valor de $\log_3 81$ es:
7. Logaritmo de un número

- Es el conjunto de letras, números y signos matemáticos, donde las letras representan valores desconocidos
- La variable independiente
- Da como resultado el exponente al que hay que elevar la **base** para obtener el número dado
- La variable dependiente
- Una función
- Igual a 3
- Igual a 4

Comprendiendo

Logaritmo de un número

El logaritmo de un número da como resultado el exponente al que hay que elevar la **base** para obtener el número dado, es decir:

Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ números reales, $\boldsymbol{a} > 0, a \neq 1$, que cumplen con la ecuación exponencial

$$\boldsymbol{a^x = y}$$

Entonces $\boldsymbol{x}$ es el valor del logaritmo de base a del número $\boldsymbol{y}$, y la cual se representa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\log_a y = x}$$

Exponente

$$\boldsymbol{\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y}$$

base

Con a y y que pertenecen a los números reales positivos y $\boldsymbol{y}$ diferente de 1.

$$(\boldsymbol{a, y} \in \boldsymbol{R^+}; \quad \boldsymbol{a, y \neq 1})$$

Ejemplo 1. Escribe cada ecuación a su forma equivalente.

Función	Ecuación	Función equivalente
$12^x = 144$	Esta dada por: $\log_a y = x$ Se determinan valores para: a = 12 y = 144	$\log_{12} 144 = x$
$\log_3 y = x$	Esta dada por: $a^x = y$ Se determinan valores para: a = 3	$y = 3^x$

Ejemplo 2. Determina el valor numérico de x en la siguiente expresión: $\boldsymbol{log_x 64 = 3}$

Solución

Primero se convierte la expresión de forma exponencial

$$\boldsymbol{log_x 64 = 3 \rightarrow x^3 = 64}$$

Como $\mathbf{64 = 4^3}$, entonces la expresión se puede escribir de la siguiente forma.

$$\boldsymbol{x^3 = 4^3}$$

Se saca raíz cúbica a ambos .

Por lo tanto, se concluye que $\boldsymbol{x = 4}$

Ejemplo 3. Determina el valor de x en la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\log_{\frac{3}{2}} x = -2}$$

Solución: Escribiendo la expresión en forma exponencial

$$\boldsymbol{\log_{\frac{3}{2}} x = -2 \leftrightarrow x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{3^{-2}}{2^{-2}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}}$$

Por consiguiente $\boldsymbol{x = \frac{4}{9}}$

Nota: Una ecuación logarítmica puede expresarse como una ecuación exponencial y a su vez una ecuación exponencial puede expresarse como una ecuación logarítmica, por lo tanto, tenemos dos formas de expresar una ecuación:

$$\boldsymbol{log_2 16 = x \;\; puede\ expresarse\ como \quad 2^x = 16}$$

Propiedades de los logaritmos

Para cualquier $\boldsymbol{M, N, b} > 0\ y\ b \neq 0$, se cumple que:

Propiedad 1. Logaritmo de uno	$log_b 1 = 0$
Propiedad 2. Logaritmo de la base	$log_b b = 1$
Propiedad 3. Logaritmo de una potencia	$log_b M^n = n\, log_b M$
Propiedad 4. Logaritmo de una raíz	$log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} log_b M$
Propiedad 5. Logaritmo de un producto	$log_b MN = log_b M + log_b N$
Propiedad 6, Logaritmo de un cociente	$log_b \frac{M}{N} = log_b M - log_b N$
Propiedad 7. Logaritmo natural	$\log_e \mathrm{M} = \ln \mathrm{M}$
$ln = logaritmo\ natural\ y\ e = 2.7182 \ldots.$	

Fórmula para la conversión de base de un logaritmo.

$$\boldsymbol{si}\ \ \boldsymbol{a} > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1.\ \ y\ \ x > 0.\ \ entonces$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad\qquad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ejemplo 1. Desarrolla la siguiente expresión utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$\log_3 x^{12}$$

Solución: Se aplica la *propiedad 3* de los logaritmos $\log_b M^n = n \log_b M$, se tiene que:

$$\log_3 x^{12} = 12 \log_3 x$$

Ejemplo 2. Aplicando las propiedades de los logaritmos desarrolla la siguiente expresión.

$$\log_2 3x^4\sqrt{y}$$

Solución: Se utiliza *la propiedad 5* $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$, se obtiene:

$$\log_2 3x^4\sqrt{y} = \log_2 3 + \log_2 x^4 + \log_2 \sqrt{y}$$

Ahora se utilizan las *propiedades 3* $\log_b M^n = n \log_b M$ y *4* $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$, se tiene la siguiente expresión:

$$\log_2 3 + 4\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y$$

Ejemplo 3. Utiliza las propiedades de los logaritmos para escribir la siguiente expresión con un solo logaritmo.

$$2\log_a x + 6\log_a z - 3\log_a yz$$

Se aplica la *propiedad 3* $\log_b M^n = n \log_b M$ obtenemos:

$$\log_a x^2 + \log_a z^6 - \log_a y^3z^3$$

Ahora se utiliza la *propiedad 5* $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$ y la expresión queda de la siguiente manera:

$$\log_a x^2z^6 - \log_a y^3z^3$$

Ahora se aplica la *propiedad 6* $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$, la expresión queda de la siguiente manera:

$$\log_a \frac{x^2\, z^6}{y^3\, z^3}$$

Ejemplo 4. Transformar a base $\mathbf{10}$ el siguiente logaritmo $\mathbf{\log_3 343}$

Solución: Al aplicar la fórmula de conversión de base:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Se tiene que $b = 3$, $x = 343$ y $a = 10$, si se sustituyen estos valores resulta:

$$\log_3 343 = \frac{\log_{10} 343}{\log_{10} 3}$$

Ejemplo 5. Transformar a base $\mathbf{8}$ el siguiente logaritmo $\mathbf{\log_2 5x}$

Solución: Al aplicar la fórmula de conversión de base:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Se tiene que $b = 3$, $x = 343$ y $a = 10$, si se sustituyen estos valores resulta:

$$\log_2 5x = \frac{\log_8 5x}{\log_8 2}$$

Practicando

I. Convierte la siguiente ecuación logarítmica a ecuación exponencial.

1. $\log_x 16 = 4$

Se convierte la expresión de forma exponencial aplicando la expresión $a^x = y$

Obtener el valor de x.

II. Convierte a base 10 el siguiente logaritmo

1. $\log_4 3x$

Aplicar la fórmula de conversión de base:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

III. Utiliza las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:

$1. \log_5 \frac{3x^3(1-2x)^6}{2x^y(x^2-y^2)}$

Aplica la propiedad 6

$$log_b \frac{M}{N} = log_b M - log_b N$$

Ahora aplica la propiedad 5

$$log_b MN = log_b M + log_b N$$

2. $\log_4 \sqrt{3x^2y^4}$

Aplica la propiedad 4

$$log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} log_b M$$

Ahora aplica la propiedad 5

$$log_b MN = log_b M + log_b N$$

Por último, aplica la propiedad 3

$$log_b M^n = n \, log_b M$$

IV. Aplicando las propiedades de los logaritmos expresa los siguientes logaritmos en un solo logaritmo.

$1. 2 \ln 5 + 2 \ln x$

Aplica la propiedad 3

$$log_b M^n = n \, log_b M$$

Posteriormente, aplica la propiedad 5

$$log_b MN = log_b M + log_b N$$

2. $\frac{1}{2}\log_7 x + \frac{1}{3}\log_7 y$

Aplica la propiedad 4

$$\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$$

Por último, aplica la propiedad 5

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

3. $\log(x-2) - \frac{4}{5}\log(x+2) + 2\log(x+1)$

Aplica la propiedad 5

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

Aplica la propiedad 6

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

Por último, aplica la propiedad 4

$$\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_b M$$

Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver los siguientes ejercicios.

Convierte la siguiente ecuación logarítmica a ecuación exponencial.

- $\log_3 81 = 4$

Convierte a base 10 el siguiente logaritmo

- $\log_2 8$

Utiliza las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:

- $\log_a 7^4$
- $\log_6 3^{-3/2}$
- $\log_e \sqrt[3]{e^7 x}$
- $\log \sqrt{(x+y)^4 z^5}$

Aplicando las propiedades de los logaritmos expresa los siguientes logaritmos en un solo logaritmo.

- $1 - \log_4(m-1) - \log_4(m+1)$
- $3\log m - 2\log n$
- $\frac{1}{8}\log x + \frac{1}{3}\log y - \frac{1}{4}\log z$
- $\log 5 + 1 + \log y - 7\log x$

Autoevaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Puedo explicar qué es un logaritmo.		
Reconozco los elementos de un logaritmo.		
Soy capaz de convertir una expresión logarítmica a una expresión exponencial.		
Logro aplicar las propiedades de los logaritmos.		
Puedo determinar el valor de la incógnita en un logaritmo.		
Resuelvo problemas que implican el uso de logaritmos.		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Introducción a propiedades de logaritmos (1 de 2) (video) | Khan Academy Disponible en: https://es.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:logs/x2ec2f6f830c9fb89:log-prop/v/introduction-to-logarithm-properties
- Introducción a propiedades de logaritmos (artículo) | Khan Academy Disponible en: https://es.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:logs/x2ec2f6f830c9fb89:log-prop/a/properties-of-logarithms

Referencias

- Johnson, L. Murphy (2004). Algebra y trigonometría con aplicaciones. Editorial Trillas.
- Colegio nacional de matemáticas, S.C. (2006). Álgebra. Editorial Mexicana.

Lección 16. Ecuaciones logarítmicas

Explorando

Resuelve las expresiones algebraicas, da respuesta relacionando las columnas.

1. $3(x+4)+5x=4$	• $x=\frac{2}{3}$, $x=-7$
2. $4(x+2)=7(3-x)$	• $x=5$
3. $\sqrt{5a-1}-2\sqrt{a+1}=0$	• $x=5$, $x=-2$
4. $x^2-3x-10=0$	• $x=-1$
5. $3x^2+19x-14=0$	• $x=\frac{13}{11}$

Comprendiendo

Primeramente veremos la diferencia entre una ecuación algebraica y una trascendente. La primera puede reducirse a un polinomio igual a cero del cual se puede hallar sus soluciones o raíces, como por ejemplo x+4=7. Mientras que la segunda son ecuaciones que no pueden reducirse a una ecuación de la forma f(x)= 0, para resolverse mediante operaciones algebraicas, suelen tener logaritmos de cualquier base de las incógnitas, las incógnitas como exponentes o como argumentos de expresiones trigonométricas por lo que requiere que la ecuación se transforme como, por ejemplo: 3^x , log $(1+x^2)$, $sen\, 2x$.

Ecuaciones logarítmicas

Para resolver una ecuación logarítmica es necesario tener dominio de las propiedades de los logaritmos y su definición, además de considerar las siguientes recomendaciones.

1. Obtener una expresión logarítmica sencilla donde tengamos la misma base en **ambos** lados de la ecuación.
2. Usar el hecho de que $\log_b Y = \log_b X$, esto implica que $Y = X$, y resolverla.
3. Al obtener la solución o soluciones **comprobarlas** en la ecuación original.
4. Recuerda que los **números negativos no tienen logaritmos**.

Ejemplo 1. Resolver la siguiente ecuación:

$$\log_5(2x + 1) = 2$$

Solución: Por definición de logaritmo la ecuación

$$\log_5(2x + 1) = 2 \qquad a^x = y$$

se convierte en: $\quad 2x + 1 = 5^2$

Ahora se resuelve esta ecuación.

$$2x + 1 = 25$$
$$2x = 24$$
$$x = 12$$

Se **comprueba** el valor de $x = 12$ en la ecuación $\log_5(2x + 1) = 2$ y se tiene:

$$log_5[2(12) + 1] = 2$$

$$log_5 25 = 2$$

Por definición de logaritmo se tiene que:

$$\log_5 25 = 2 \leftrightarrow 5^2 = 25$$

Ejemplo 2. Encuentra los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$\log_{10}(x + 2) + \log_{10}(x - 1) = 1$$

Solución: Se utiliza la *propiedad 5* $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$ para expresar la ecuación en un solo logaritmo:

$$\log_{10}(x+2) + \log_{10}(x-1) = 1 \rightarrow \log_{10}(x+2)(x-1) = 1$$

Ahora se realiza la multiplicación de binomios:

$$(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$$

Quedando el logaritmo de la siguiente manera:

$$\log_{10}\left(x^2 + x - 2\right) = 1$$

Ahora se aplica la definición de logaritmo y se resuelve la ecuación resultante:

$$\log_{10}\left(x^2 + x - 2\right) = 1$$

$$x^2 + x - 2 = 10^1$$

$$x^2 + x - 2 - 10 = 0$$ Se iguala a cero la ecuación

$$x^z + x - 12 = 0$$ Se resuelve la ecuación

$$(x+4)(x-3) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad , \quad x - 3 =$$

$$x = -4 \quad , \quad x = 3$$ Retomando que los números negativos no tienen negativos

Por lo tanto, el valor que satisface la ecuación es $x = 3$

Ejemplo 3. Resolver: $\log_2(x+1) - \log_2(x-6) = 3$

Solución: Aplicando la *propiedad 6* $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$de los logaritmos se escribe de la siguiente forma:

$$\log_2\left(\frac{x+1}{x-6}\right) = 3$$

Se convierte a ecuación exponencial quedando de la siguiente manera:

$$\left(\frac{x+1}{x-6}\right) = 2^3$$

$$\frac{x+1}{x-6} = 8$$

Se resuelve la ecuación:

$$x + 1 = 8(x-6)$$

$$x + 1 = 8x - 48$$

$$-7x = -49$$

$$x = 7$$

Ejemplo 4. Resolver: $\log_2 \sqrt{3x-1} = 1 - \log_2 \sqrt{x+1}$

Solución: se agrupan los logaritmos en un solo miembro.

$$\log_2 \sqrt{3x-1} + \log_2 \sqrt{x+1} = 1$$

Se aplica la *propiedad 5* $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$ de los logaritmos

$$\log_2\left(\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}\right) = 1$$

Se convierte a ecuación exponencial quedando de la siguiente manera:

$$\left(\sqrt{\mathbf{3x+1}}\right)\left(\sqrt{\mathbf{x+1}}\right)=\mathbf{2}^{\mathbf{1}}$$

Se multiplica obteniéndose:

$$\sqrt{\mathbf{3x^2+2x-1}}=\mathbf{2}$$

$$\left(\cancel{\sqrt{\mathbf{3x^2+2x+1}}}\right)^{\cancel{2}}=(\mathbf{2})^{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{3x^2+2x-1=4}$$

$$\mathbf{3x^2+2x-5=0}$$

Se iguala a cero la ecuación
Se resuelve la ecuación

$$\mathbf{(3x+5)(x-1)=0}$$

$$\mathbf{x=-\frac{5}{3}}\ ,\ \ \mathbf{x=1}$$

Retomando que los números negativos no tienen negativos

Por lo tanto, el valor que satisface la ecuación logarítmica es $\boldsymbol{x=1}$

Practicando

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

1. $\log_2(x+2)=3$

Se expresa la ecuación en forma exponencial $a^x=y$

Se resuelve la ecuación resultante encontrando el valor de la incógnita.

2. $\log_2(x+3)-\log_2(x-6)=\log_2(x-5)$

Se aplica la propiedad 5 en el primer miembro de la igualdad.

$$\mathbf{log}_b\, MN = \mathbf{log}_b\, M + \mathbf{log}_b\, N$$

Se elimina los logaritmos en ambos miembros de la igualdad.

Se resuelve la ecuación resultante hallando el valor de la incógnita.

3. $\log_5(4-x)^3=\log_5(6+x)^3$

Se eliminan los logaritmos en ambos miembros de la igualdad.

Se elimina el exponente en ambos miembros de la igualdad.

Se resuelve la ecuación resultante encontrando el valor de la incógnita.

Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver los siguientes ejercicios.

1. $\log_5(2x-1)-\log_5(x-5)=1$
2. $\log_5(2x+1)=2$
3. $\log_3(2x+5)-\log_3(x-1)=2$
4. $\mathbf{ln}(\mathbf{3x-1})+\mathbf{ln}(\mathbf{x+1})=\mathbf{ln}(\mathbf{4x+7})$
5. $\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln(4x+4)$
6. $\log_5 25-\log_5(x+100)=-1$

Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Ejecuto las propiedades de los logaritmos.		
Soy capaz de distinguir la diferencia entre una ecuación algebraica y una ecuación trascendente.		
Puedo resolver ecuaciones que implican logaritmos.		
Conozco los procedimientos para resolver una ecuación logarítmica.		
Puedo comprobar la solución de una ecuación logarítmica.		
En el caso de que hayas respondido “Tengo dudas” en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Khan Academy. Resolver ecuaciones exponenciales mediante propiedades de exponentes, [video] Recuperado de: https://es.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:exp/x2ec2f6f830c9fb89:exp-eq-prop/v/solving-exponential-equations-with-exponent-properties
- Mate 27. Ecuaciones Exponenciales y logarítmicas, [video] YouTube Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=ElHiTbnpbTQ
- Khan Academy. Resuelve ecuaciones exponenciales mediante propiedades de exponentes, [en línea] Recuperado de: https://es.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:exp/x2ec2f6f830c9fb89:exp-eq-prop/e/solve-exponential-equations-using-properties-of-exponents--basic-

Referencias

- Johnson, L. Murphy (2004). Algebra y trigonometría con aplicaciones. Editorial Trillas.

Lección 17. Ecuaciones exponenciales

Explorando

Contesta las siguientes preguntas, resolviendo las ecuaciones.

1. El valor de x en la siguiente ecuación $5^x = 625$ es:

   a) $x = 125$ b) $x = 25$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

2. El valor de x en la siguiente ecuación $5^{x-1} = 25$ es:

   a) $x = 3$ b) $x = 2$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

3. El valor de x en la siguiente ecuación $7^{3x-3} = 343$ es:

   a) $x = 3$ b) $x = 2$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

4. El valor de x en la siguiente ecuación $9^{2x} = 9^0$ es:

   a) $x = 3$ b) $x = 2$ c) $x = 0$ d) $x = 5$

5. El valor de x en la siguiente ecuación $3^{2x+3} = 3$ es:

   a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$

Comprendiendo

Ecuaciones exponenciales

A las ecuaciones con la incógnita en el exponente se le llama **ecuaciones exponenciales** y se resuelven aplicando el siguiente procedimiento.

1. Expresar la ecuación de manera que en **ambos** lados de la igualdad la **base** sea la misma, de ser así, es válido igualar los exponentes.
2. Para encontrar el valor de la incógnita se aplican las propiedades de los logaritmos.

Ejemplo 1. Resolver la siguiente ecuación:

$$9^{2x} = 27$$

Solución: primero se expresa con la misma base ambos lados de la igualdad, en este caso 3.

$$\left(3^{2}\right)^{2x} = 3^{3}$$

Se multiplican los exponentes del primer miembro.

$$3^{4x} = 3^{3}$$

Ahora se igualan los exponentes de ambos miembros de la igualdad y se resuelve la ecuación resultante.

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 2. Encuentra los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$2^{x+2} = 64$$

Solución: primero se expresa con la misma base ambos lados de la igualdad.

$$2^{x+2} = 2^{6}$$

Ahora se igualan los exponentes de ambos miembros de la igualdad y se resuelve la ecuación que resulta.

$$x + 2 = 6$$

$$x = 6 - 2$$

$$x = 4$$

Por lo tanto, el valor que satisface la ecuación es $x = 4$

Ejemplo 3. Resolver: $7^{x+2} = 4^{3x}$

Solución: Se aplica logaritmo en ambos miembros de la igualdad.

$$\log 7^{x+2} = \log 4^{3x}$$

Se utiliza la propiedad de los logaritmos $\log_b M^n = n \log_b M$ y se obtiene:

$$(x+2)\log 7 = 3x \log 4$$

Enseguida se aplica la propiedad distributiva.

$$x \log 7 + 2 \log 7 = 3x \log 4$$

Se agrupan los términos semejantes en un solo miembro de la igualdad.

$$x \log 7 - 3x \log 4 = -2 \log 7$$

Se factoriza la x.

$$x(\log 7 - 3 \log 4) = -2 \log 7$$

Se despeja x.

$$x = \frac{-2 \log 7}{\log 7 - 3 \log 4} = 1.758638905$$

Se comprueba el resultado de $x = 1.758638905$ en la ecuación inicial.

$$7^{1.758638905+2} = 4^{3(1.758638905)}$$

$$1501.130233 = 1501.130233$$

Practicando

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

1. $4^x = 8$	
Se expresan como potencias con la misma base ambos miembros de la igualdad.	
Se igualan los exponentes de la igualdad.	
Se resuelve la ecuación resultante.	

2. $2^{5x} = 8^{x+5}$	
Se expresan como potencias con la misma base ambos miembros de la igualdad.	
Se igualan los exponentes de la igualdad.	
Se resuelve la ecuación resultante.	

3. $5^{x+1} = 3^{2x}$	
Se aplica logaritmo a ambos miembros de la igualdad.	
Se aplica la propiedad 3 de los logaritmos.	
Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación en el primer miembro de la igualdad.	
Se agrupan términos semejantes y se extrae el factor común.	
Se despeja la incógnita para obtener su resultado.	

Problemario

Si deseas seguir practicando puedes resolver los siguientes ejercicios.

1. $2^{x^2} = 16^x$
2. $27^{x-4} = 9^{x+2}$
3. $125^{2x-1} = 25^{x+8}$
4. $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$
5. $2^{x+2} = 16$

Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Conozco los procedimientos para la resolución de una ecuación exponencial.		
Soy capaz de resolver una ecuación exponencial.		
Distingo entre una ecuación exponencial y una ecuación logarítmica.		
Soy capaz de aplicar las propiedades de los logaritmos en la solución de una ecuación exponencial.		
Puedo comprobar la solución de una ecuación Exponencial.		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Matemáticas Simplificadas. Disponible en: https://profesorminero.files.wordpress.com/2013/03/matesimp2.pdf (páginas 550-557)

Referencias

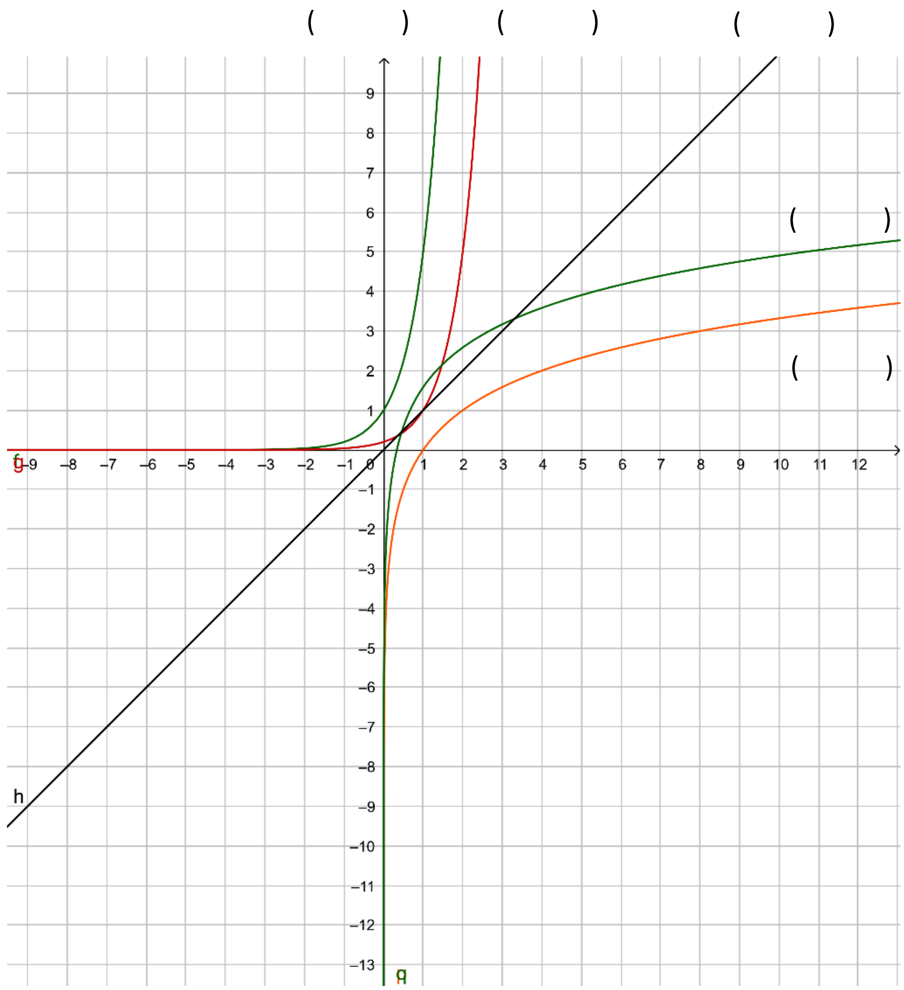
- Johnson, L. Murphy (2004). Algebra y trigonometría con aplicaciones. Editorial Trillas.
- Colegio nacional de matemáticas (2006). Álgebra. Editorial Mexicana

Lección 18. Funciones Exponenciales y logarítmicas

Explorando

Relaciona cada función con su gráfica, colocando el número que corresponda.

1. $y = 5^x$



2. $y = 5^{x-1}$

3. $y = x$

4. $y = \log_2 x$

5. $y = \log_2 3x$

Comprendiendo

Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Función. Es la relación que existe entre dos variables, de modo que a los elementos de "x" les corresponde solo un elemento de "y".

Las funciones Algebraicas tienen constantes utilizadas como exponentes y una variable como base. Ahora en esta lección se estudiarán las ***funciones exponenciales*** *las cuales* tienen exponentes variables y una constante como base.

Función exponencial

Sea ***a*** un número real, $\boldsymbol{a} > 0 \text{ y } a \neq 1$. La función:

$$\boldsymbol{f(x) = a^x}$$

Se denomina función exponencial de base ***a***.

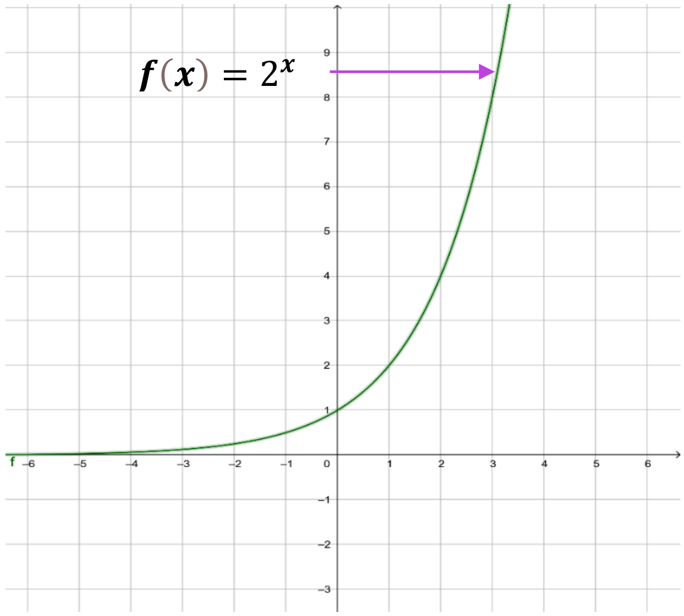
Ejemplo 1. Graficar la función $\boldsymbol{y = 2^x}$.

Primero se le asignan valores a la variable $\boldsymbol{x}$ y se sustituye cada valor en la función $\boldsymbol{y = 2^x}$, con la finalidad de encontrar los valores que le corresponden a la variable $\boldsymbol{y}$.

Así se obtiene la tabla de valores.

$\boldsymbol{x}$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4
$\boldsymbol{y}$	1	$1/2$	2	$1/4$	4	$1/8$	8	$1/16$	16

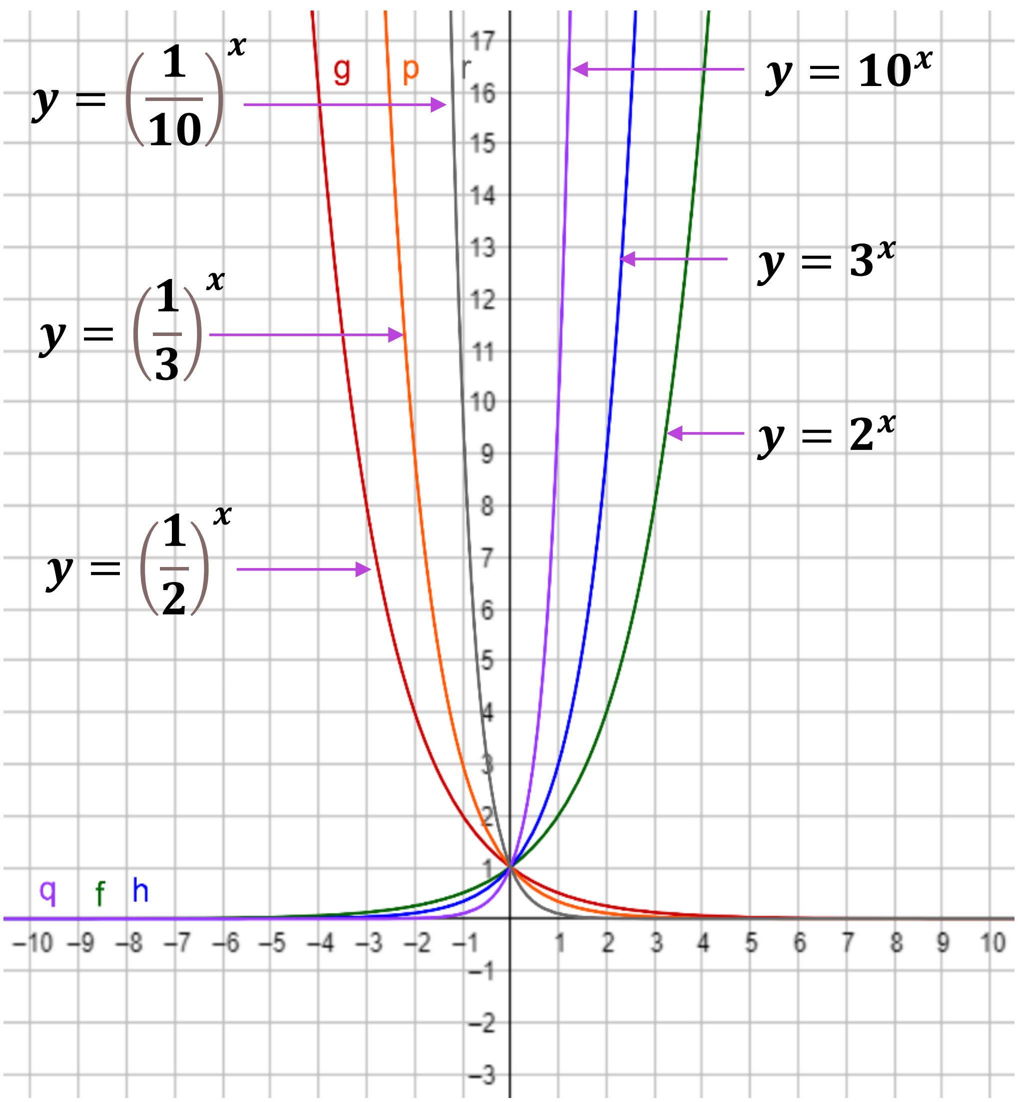
Posteriormente, se representan los valores de x como abcisas y los valores correspondientes a y como ordenadas, obteniendo una serie de puntos que aparecen en la gráfica.



Ejemplo 2. Representar graficamente las funcione: $y = 2^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 3^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 10^x, y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

Construyendo primero una tabla de valores asignando valores a x obteniendo valores a y.

x	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4
$y = 2^x$	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{8}$	8	$\frac{1}{16}$	16
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$	16	$\frac{1}{16}$
$y = 3^x$	1	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{9}$	9	$\frac{1}{27}$	27	$\frac{1}{81}$	81
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	1	3	$\frac{1}{3}$	9	$\frac{1}{9}$	27	$\frac{1}{27}$	81	$\frac{1}{81}$
$y = 10^x$	1	$\frac{1}{10}$	10	$\frac{1}{100}$	100	$\frac{1}{1000}$	1000	$\frac{1}{10000}$	10000
$y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$	1	10	$\frac{1}{10}$	100	$\frac{1}{100}$	1000	$\frac{1}{1000}$	10000	$\frac{1}{10000}$



Funciones logarítmicas

Debido a que cada función exponencial $y = a^x$ $(a > 0 \ y \ a \neq 1)$, y toda función exponencial debe tener una función inversa, la cual se obtiene intercambiando x por y:

$$x = a^y$$

Para despejar y , se convierte a la forma logarítmica quedando de la siguiente manera:

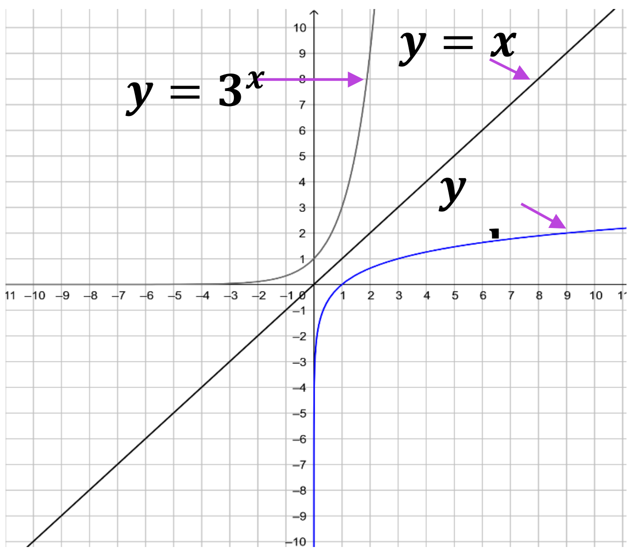
$$y = \log_a x$$

Si se quiere graficar $y = \log_a x$, primero se grafica $x = a^y$. Esta es una forma alternativa, ya que las gráficas de las funciones inversas son simétricas con respecto a la recta de identidad $y = x$, así pues, podría graficarse $y = a^x$ y utilizarse para realizar la gráfica de $y = \log_a x$.

Ejemplo 1. Representar gráficamente las siguientes funciones, $y = 3^x$ y $y = \log_3 x$ $(x = 3^y)$ en el mismo sistema de coordenadas.

1. Se asignan valores a x en la función $y = 3^x$
2. Se asignan valores a y en la función $x = 3^y$
3. Se obtienen los valores de ambas funciones y se representan en el eje de coordenadas, posteriormente se unen los puntos.

x	$y = 3^x$
0	1
-1	$1/3$
1	3
-2	$1/9$
2	9
-3	$1/27$
3	27



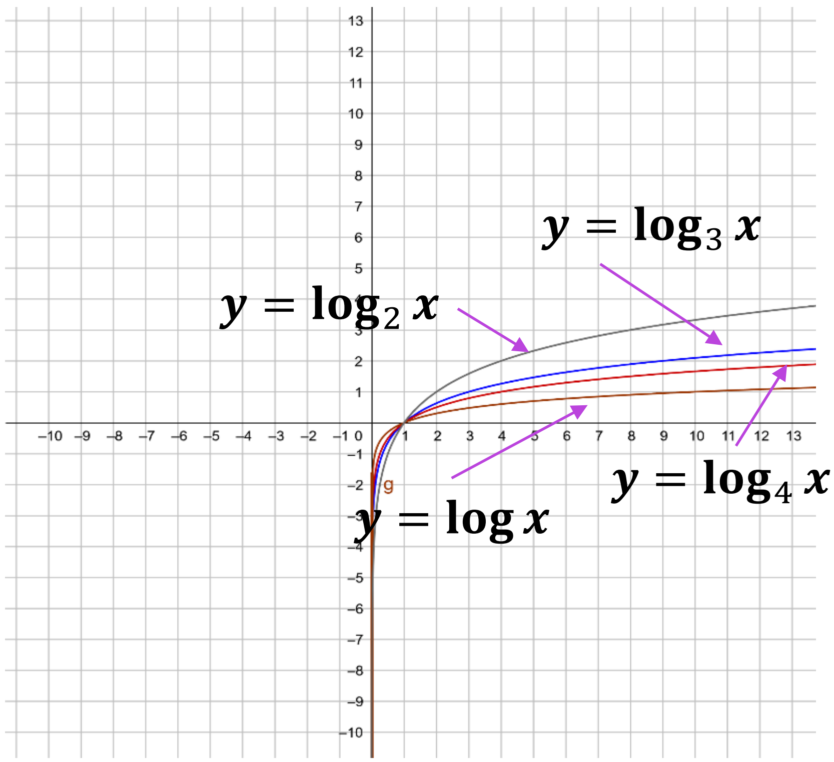
y	$x = 3^y$
0	1
-1	$1/3$
1	3
-2	$1/9$
2	9
-3	$1/27$
3	27

Se observa que ambas funciones son crecientes y son continuas.

Ejemplo 2. Graficar: $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_4 x$ y $y = \log x$

Construyendo la tabla de valores.

x	$1/2$	1	2	3	4	5	6
$y = \log_2 x$	-1	0	1	1.5849	2	2.3219	2.5849
$y = \log_3 x$	-0.6309	0	0.6309	1	1.2618	1.4649	1.6309
$y = \log_4 x$	$-1/2$	0	$1/2$	0.7924	1	1.1609	1.2924
$y = \log x$	-0.3010	0	0.3010	0.4771	0.6020	0.6989	0.7781



Practicando

Obtener la gráfica de las siguientes funciones:

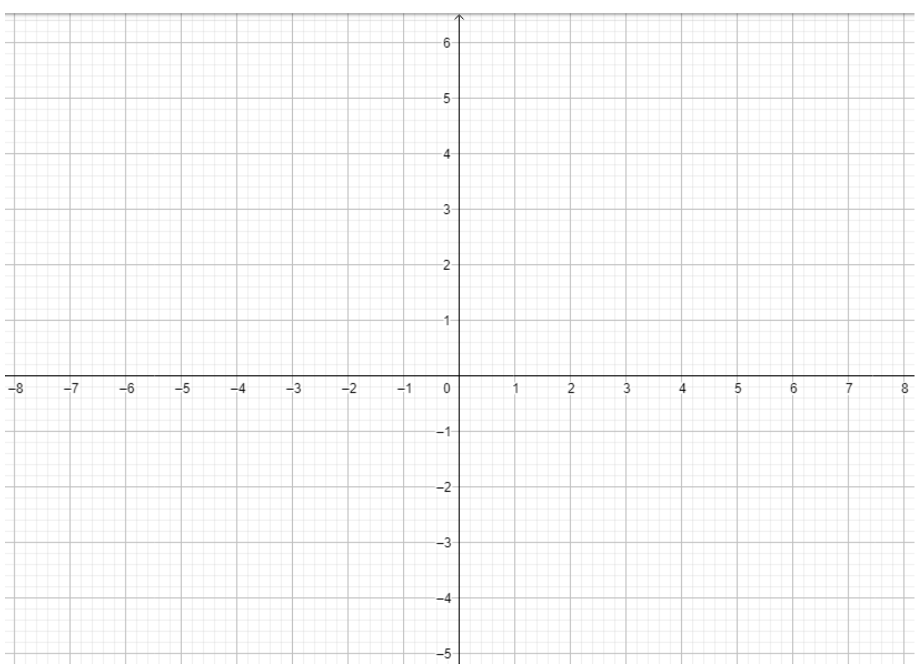
1. $y = \log x$

- Se expresa la función de forma exponencial quedando "y" como variable independiente.

- Se realiza la tabulación dándole valores a "y" para encontrar los valores de "x".

x	y

- Se procede a localizar los puntos en el sistema de coordenadas rectangulares, para obtener la gráfica de la función.



2. $y = \log_2 x^2$

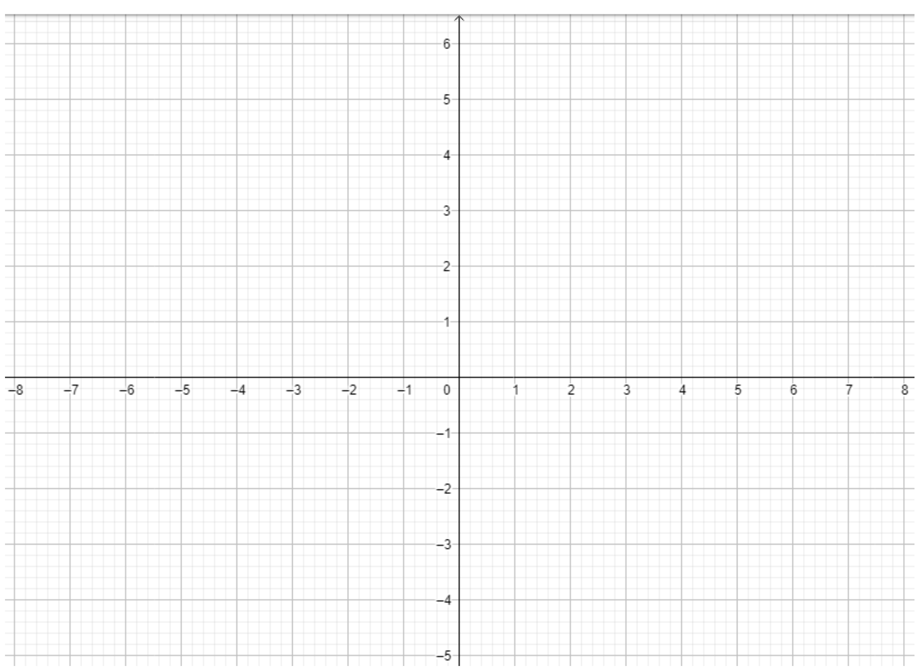
- Se expresa la función de forma exponencial quedando "y".

- Se despeja "x" quedando como la variable dependiente.

- Se realiza la tabulación dándole valores a "y" para encontrar los valores de "x".

x	**y**

- Se procede a localizar los puntos en el sistema de coordenadas rectangulares, para obtener la gráfica de la función.



Problemario

Si deseas seguir practicando, puedes resolver los siguientes ejercicios.

1. $y = 9^{5x}$
2. $y = 4^{x}$
3. $y = 5^{3x+1}$
4. $y = 2^{x-2}$
5. $y = \log_2(x+1)$
6. $y = 4^{2x}$
7. $y = \ln(2x)$
8. $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right)$

Auto evaluación

Indicadores	¿Puedo lograrlo?	¿Tengo dudas?
Conozco los procedimientos para graficar una función exponencial.		
Puedo graficar una función exponencial.		
Comprendo los procedimientos para graficar una función logarítmica.		
Soy capaz de graficar una función logarítmica.		
Distingo la diferencia entre una función exponencial y una función logarítmica al graficar.		
En el caso de que hayas respondido "Tengo dudas" en alguno de los indicadores, refiere el tema en que necesitas más asesoría.		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). Matemáticas simplificadas. Segunda edición. Pearson educación (pp. 550-557) Disponible en: https://clea.edu.mx/biblioteca/files/original/49e8f315f5a6b3cee6f01470e9093068.pdf

Referencias

- Johnson, L. Murphy (2004). Algebra y trigonometría con aplicaciones. Editorial Trillas.
- Colegio nacional de matemáticas (2006). Álgebra. Editorial Mexicana.

Imágenes tomadas de:

- GeoGebra.